

FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University: for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B. A. and B. Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

date practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three I's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media. Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots. He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful.

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira.

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co-ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical).

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University.

4. Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text-books prepared for its courses in science. Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi. This has added to the labour and the cost involved. At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union. The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50. The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re organizing the teaching arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective.

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University.

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education. The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves. The text books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities. Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations.

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems. Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach. One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another—a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future. The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science.

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11. I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good books in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it. Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text-books. If, however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded.

The J. N. Tata University
Convocation Hall, Nagpur.
15th August 1950.

K. L. Dubey
Vice-Chancellor,
Nagpur University.

INTRODUCTION*

"It is India that gave the ingenious method of expressing all numbers by means of ten symbols, each symbol receiving a value of position, as well as an absolute value a profound and important idea which appears so simple to us now that we ignore its true merit but its very simplicity, the great ease which it has lent to all computations, puts our arithmetic in the first rank of useful inventions

'Even though there has been a slow growth of ideas in the history of human civilization the history of reckoning presents a peculiar picture of desolate stagnation When viewed in this light the achievement of the unknown Hindu, who sometime in the first centuries of our era discovered the principle of position, assumes the proportion of a world event

'The invention of *sūnya* or zero liberated the human intellect from the prison bars of the Greek counting frame Once there was a sign for the empty column,

* In writing the Introduction in English I have followed the wishes of Lt Col Shri K L Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi.

'carrying over' on slate, paper or other material for writing was just as easy as carrying over on the abacus.

"Āryabhata about A.D. 470 discusses the rules of arithmetic, uses the law of signs of Diophantus, gives a table of sines in intervals of $3\frac{1}{4}$, and evaluates π as 3.1416. In short, Hindu mathematics starts where Alexandrian mathematics left off. Just a little later, in the sixth century, comes Brahmagupta, who follows the same themes as Āryabhata: calculation, series, equations. These early Hindu mathematicians had already stated the laws of 'ciphers' or *śūnya*, on which all our arithmetic depends, namely,

$$a \times 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$a - 0 = a$$

"Equipped with their simple and eloquent number symbols the Hindus broke away completely from the metaphorical way of dealing with fractions. They wrote fractions as we write them and as they had an arithmetic which lent itself to rapid calculation without mechanical aids, they experimented with them as with whole numbers. Thus Mahavira (A.D. 850) gave our rule for dividing one fraction by another in the same words which a school teacher might use today 'make the denominator the numerator and then multiply

"All the algorithms for fractions now used were invented by the Hindus.

* To this is to be added

$$\frac{a}{0} = \infty$$

"Is it not equally strange that algebra that corner stone of modern mathematics also originated in India and about the same time that positional numeration did ?

"The advance from 'rhetorical' discussion of rules for solving problems to symbolism of the modern sort was wellnigh impossible for the Greeks, who had already exhausted the letters of the alphabet for proper numbers. Although the Hindu numerals removed this obstacle to progress, there was at first no social machinery to impose the universal use of devices for representing operators. The only operative symbol which was transmitted to us by the Arabs from Hindu sources is the square root sign ($\sqrt{\quad}$)."

Prof. Lancelot Hogben

*

*

*

संज्ञादक चान्वदन्ति बुद्धेरधिष्ठितं सत्पुरुषेण साक्षात् ।

व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकजीवमव्यक्तनीलं गणितं च वन्दे ॥

(Bhāskarācārya, 12th century A.D.)

Algebra is बीज, बीजक्रिया or बीजगणित, the science of analysis, the operation or computation with 'seeds'. It was also known as बुद्धगणित or simply बुद्ध (which dealt particularly with indeterminate equations of the first degree) Another name was अव्यक्त गणित 'calculations with unknowns' as against व्यक्त गणित 'calculation with knowns' used for arithmetic and geometry.

According to our ancients, the values of symbols in arithmetic are व्यक्त that is definitely determinate while in algebra they are अव्यक्त that is indefinite. Bhaskara Acharya clearly said that the science of अव्यक्त गणित is the source of the science of calculation with knowns.

Ancient Hindu algebra comprised the laws of signs, the arithmetic of zero and infinity, operations with unknowns, surds indeterminate equations of the first degree and the square nature or the so called Pellian equation. To these may be added concurrence and dissimilar operations.

Algebra began early in India during the Vedic age. The geometrical method of the transformation of a square into a rectangle having a given side is equivalent to the solution of a linear equation in one unknown—

$$ax = c^2$$

Vedic fire altars were constructed in different geometrical designs one of them was the *ajens chiti* (in the form of a falcon). Its body consisted of four squares, each of its wings a rectangle, and so on. This fire altar was enlarged in two ways—firstly, so that all the constituents were affected in the same proportion, secondly, so that the breadth of a portion of the wings was left unaffected. If x be the unit for enlargement in the first case we shall have to solve the quadratic equation

$$2x \times 2x + 2 \left\{ x \left(x + \frac{x}{6} \right) \right\} + x \left(x + \frac{x}{10} \right) = 7\frac{1}{2} + m,$$

where m denotes the increment of the fire-altar in size

$$\text{Therefore } x^2 = 1 + \frac{2m}{15}$$

In particular, when $m=94$, we shall have

$$\tilde{x}^2 = 13\frac{8}{15} = 14 \text{ (approximately),}$$

which occurs in the Śatapatha Brāhmaṇa.

In the second case of enlargement the equation for x will be

$$2x \times 2x + 2 \left\{ x \left(x + \frac{1}{5} \right) \right\} + x \left(x + \frac{1}{10} \right) = 7\frac{1}{2} + m,$$

$$\text{or } 7x^2 + \frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} + m,$$

which is a complete quadratic equation.

The problem of altar construction gave rise also to certain indeterminate equations of the second degree, such as,

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$(2) \quad x^2 + a^2 = z^2;$$

and simultaneous indeterminate equations of the type

$$ax + by + cz + dw = p,$$

$$x + y + z + w = q.$$

SYMBOLS OF OPERATION—The first syllable of a word, placed before or after the quantity, served the purpose of the symbol. For addition one of the Sanskrit words is ३१. It is abbreviated to ३. Similarly the ancient Brāhmī 𑀓, which is a cross, stands as the symbol of subtraction.

being the abbreviation of द्वय यु abbreviated from गुणन or गुणित stands for multiplication and भा from भाग or भाजित for division. Often these symbols are not used. Juxtaposition serves the purpose. The use of these symbols is best illustrated by the Bakhshali manuscript Bakhshali is a village in the Peshawar district. The manuscript lay between stones It was discovered by a farmer who was digging in the mounds in 1881 This is the oldest mathematical manuscript yet discovered It is written in ancient Sarada script of Kashmir on birch bark Its age has been variously estimated some placing it in the second century (in the days of Kanishka), others as late as the twelfth century A D

$$\begin{array}{ccc} 0 & 5 & \text{यु} \\ 3 & 1 & \end{array} \quad \text{means} \quad \frac{x}{1} + \frac{5}{1}$$

$$\begin{array}{ccc} 11 & 5 & \\ 1 & \text{यु} & 1 \end{array} \quad \text{means} \quad \frac{11}{1} + \frac{5}{1}$$

(folio 59 recto)

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 & \text{यु} \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & & \end{array} \right| \quad \text{means} \quad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10$$

(folio 47 recto)

$$\begin{array}{c} 0 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad | \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad | \quad 1 \quad 2 \quad | \quad 1 \quad \text{यु} \quad 2 \quad + \quad | \quad 1 \quad \text{यु} \quad 2 \quad + \quad | \end{array}$$

means

$$x \left(1 + \frac{3}{2} \right) + \left\{ 2x \left(1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{5x}{2} \right\}$$

$$+ \left\{ 3x \left(1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{7x}{2} \right\} + \left\{ 4x \left(1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{9x}{2} \right\}$$

(folio 25 verso, mutilated)

१	१	१	१	भा	३६
१+१	१	१			
२	२	४+५			१

$$\text{means } \frac{36}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right)}$$

(folio 13 verso)

४० भा	१६०	१३
१	१	१
		२

$$\text{means } \frac{160}{40} \times 13 \frac{1}{2}$$

(folio 42 recto)

०	५	सु	मू	०	१	०	७	+	मू	०
१	१		१		१	१			१	

$$\text{means } \sqrt{x+5} = s, \sqrt{x-7} = t$$

(folio 59 recto)

०	१	२	३	१२	४	दृश्य	३००
१	१	१	१	१	१		१

$$\text{means } x + 2x + 3 \times 3x + 12 \times 4x = 300$$

(folio 23 verso)

In later times there was a change of plan in the writing of equations. Here are two illustrations, one from Prithūdakaśvāmī (860 A. D.) and the other from Bhāskaraśāhīya (1150 A. D.)—

(१) या व ०	या १०	रु १
या य १	या ०	रु १

writing x for या

$$x^2 0 + x \cdot 10 - 8$$

$$x^2 + x 0 + 1$$

$$\text{or } 0x^2 + 10x - 8 = x^2 + 0x + 1$$

$$\text{which means } 10x - 8 = x^2 + 1$$

$$(२) \text{ या } ५ \quad \text{का } ८ \quad \text{नी } ७ \quad \text{रु } ९०$$

$$\text{या } ७ \quad \text{का } ९ \quad \text{नी } ६ \quad \text{रु } ६२$$

writing x for या, y for का and z for नी

$$5x + 8y + 7z + 90 = 7x + 9y + 6z + 62$$

Equations were classified as यावत् तावत् (simple), वग (quadratic), घन (cubic) and बावग (bi quadratic) The स्थानागसूत्र of Jainas (सूत्र ७४७) is sometimes interpreted to refer to these equations. Another classification of equations is according to Brahmagupta of 628 A D एकवग समीकरण, अनेकवग समीकरण and भावित i.e. equations in one unknown, in several unknowns and such as involved products of unknowns. एकवग समीकरण is further sub divided into linear equations and quadratic equations अव्यक्तवग समीकरण

It would be interesting to follow the ancient algebraists of India one by one and century to century. But it would be outside the scope of this small introduction. Here I shall mention in passing a point or two which are of particular interest for the history of mathematics. In 850 A D Mahavira a Jain author, wrote an epoch making work गणित सागर. He knew that the quadratic has two roots, and he employed the modern rule for finding the root of a quadratic

$$x = \left\{ \frac{c/2}{1-a/b} + \sqrt{\left(\frac{c/2}{1-a/b} \right)^2 + \frac{d}{1-a/b}} \right\}^2$$

Algebra is a generalization of arithmetic, for example, the arithmetical facts that $2+2+2=3 \times 2$, $4+4+4=3 \times 4$, etc., are all special cases of the algebraic statement that $x+x+x=3x$, where x is any number.

Algebra makes use of numbers, letters of the Roman and Greek alphabets and symbols of operation. As compared to biological sciences, the number of technical terms is insignificant.

We are fortunate in possessing a basic terminology for algebra from ancient times. As is clear from a quotation given above, algebra originated in India. As far as the use of the operational symbols, like those for plus, minus, greater than, smaller than, therefore, is concerned the Western symbols have been retained in their entirety. As regards the use of the numerals and letters of the alphabet, we have been able to use our own. It was not possible to use the European numbers and letters in a Hindi or Marathi text book.

Following the general plan, we have derived our specific algebraic terms from Sanskrit. These terms would be found to be in consonance with the rest of our language. Introducing English terms would have been as awkward as unintelligible. A detailed discussion of the matter will be found in our forthcoming work "The Problems of Indian Scientific Terminology".

The algebraic terminology was worked out in collaboration with Dr Braj Mohan, M A, Ph D of the Banaras Hindu University, Shri N A Shastri, M Sc, (Lond), Asst Prof of Mathematics Mahakoshal Mahavidyalaya, Jabulpore and Shri V M Dabadghao, M Sc, Asstt Professor of Physics, Vidarbha Mahavidyalaya, Amraoti. Shri Dabadghao is a physicist and his collaboration was of special value in exploring the use of symbols in physics and mathematics before finally deciding upon the Devanagari letters. Shri V M Dabadghao, Shri N A Shastri and a number of their collaborators worked on the symbols for month on end. A complete list of mathematical symbols in Devanagari has been printed and is available separately. English abbreviations have their counterparts in Hindi and Marathi, e.g., log (logarithm) — ल (लघ)

Our rock bottom is formed by ancient words— अश, numerator, degree, अंक digit, अन्तर distance, अपेक्षित required, आदेश substitute, आरोही ascending, उपपत्ति proof, करणी surd, क्षितिज horizon, श्रृंखला series, तिदशुन cross multiplication, समीकरण equate, निवचन interpretation, निदर्शन illustration, बीजगणित algebra, मूल root, radical (the European words are translations from Sanskrit) योग sum, राशि quantity, लब्धि quotient, अपरत्य multiple, हर denominator, सारणी table, etc, etc

Then there are words of common usage—अग्र leading, अचल constant, अनियत indefinite, अनुसन्धान investigation, आधार base, आवर्ती recurring, उच्चतम highest, उन्नयन raising, ऐक्य identity, चल variable, निर्धारक determinant, नियम

law, पंक्ति row, प्राकृतिक natural, महत्तम greatest, रेखा line, रेखीय lineal लक्षण characteristic, वास्तविक real, विवेच्य discriminant, विस्तार expansion, साधारण common, सामान्य general, सीमा limit, etc., etc.

Our ancients used a variety of terms to denote the same idea or the same term to denote various ideas. For us it was neither desirable nor possible to use one word for more than one idea or more than one word for the same idea. We had to use definite terms so that there be no confusion as to what is meant. Thus कर्ण is used for the hypotenuse as well as the diagonal रूप means form, arithmetical unit, integral numbers, known or absolute number, and a known quantity as having specific form. Similarly यण appears for the letters of the alphabet for an unknown magnitude or quantity in algebra, for the figure 1 in arithmetic and according to some for a coefficient.

For quotient we have भाग, एभि, आप्त, भागि, अवाप्त अवागि, फल, लब्ध. For coefficient we have गुण, अक प्रकृति वर्ण and यावद् तावद्. The coefficient of a root in algebra is मूलगुण. Here गुण is an agent noun, meaning a multiplier, equivalent to गुणक. For multiplication itself, Sanskrit mathematical literature shows a variety which is unsurpassed—गुणन, गुणता, हनन, हति, हत, अभिहति, वष, वर्णन, पूरण, अभ्यास, शोद, प्रत्युत्पन्न. अनुपात stands for proportion, arithmetical progression and rule of three.

Our mathematical terminology is not an isolated

list. It is in consonance with the rest of our scientific terminology, in particular with physics.

The specific terms used in algebra are not very many. They are few and simple. Those requiring a word of explanation are listed below.

अनावर्ती 'nonrecurring' is from आवर्ती 'recurring' आवर्तन is 'recurrence'.

अनुपाती 'proportional'. अनुपात 'proportion' is well-known.

अन्यथा 'aliter' Aliter is a Latin word meaning otherwise. For the Indian student अन्यथा has its parallel formations in यथा, तथा, etc

अपवर्त्य 'multiple' from अपवर्त 'the divisor', अपवर्तक 'the common measure', अपवर्तन 'reduction of a fraction to its lowest term, division without remainder, divisor.' अपवर्त्य is widely used

अतमेय is a faithful translation of incommensurable, element by element, *in-^{म-} + -com -^{म-} + mensu-
rare* व्मा + -able पय.

आदेश 'substitute' is well known to students of Sanskrit, e g Pāṇini स्थानिवदादेशोऽनन्वित्त्वर्थी .

क्रमवय and संवय for 'permutation' and 'combination' respectively are self explanatory terms and have been used as being clearer and more definite than भावना for combination and व्यवहार for permutation.

હેદા 'logarithm'. According to નેમિચંદ્ર the Jain author of ષિલોચમાર if $x=2^n$ then n is called the અર્થહેદ of x હેદ is the number of times a particular number can be divided by a base. If $64=4^3$, then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4. Literally હેદ is 'cutting' and the number of times that the division can take place is હેદમત્રયા or simply હેદા. In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4.

દશમિશિશ 'mantissa'. The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make weight. The word is believed to be of Etruscan origin. This word has gone out of use in general English, where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal part of a common logarithm.

નિષ્પત્તિ for 'ratio' is used not only in Hindi but also in Bengali and elsewhere, e.g., in the Modern Anglo-Bengali Dictionary by Charu Chandra Guha.

પ્રતિ હેદો 'anti logarithm' from હેદા 'logarithm'.

પ્રતિનિધાન 'to represent'. પ્રતિનિધિ for representative is well known.

ધિત 'function' (for explanation see the Glossary)

માપાંક is clearer than English 'modulus' which literally means 'a small measure'.

मूलक्रिया	'extraction of roots'. It is an ancient word. Latin 'evolution' means simply 'unfolding'.
विवेचक	'discriminant' विवेक 'discrimination' is well known. विवेचन is the verbal noun from the same root.
व्युत्क्रम	'reciprocal'. व्युत्क्रम is literally inverted order, so is the reciprocal of a fraction. In Latin 'reciprocal' is 'turning backward and forward'.
व्यतिहरण	is an ancient word meaning interchange.
शुद्ध	'correct' Cf. परिशुद्ध 'accurate'
सत्यापन	'verification' is an ancient word. The verbal form is सत्यापयति 'verifies'
समापसक्त	'common factor' is of wide usage
ममङ्	'equivalent' अहम् is an ancient word अहम् 'value' is derived from the root अह् 'to be worthy of'
साध्य	'that which is to be found out by calculation, to be proved or established' Similarly प्रमेय 'that which is to be established by प्रमाण or proof'
सारणी	for 'table' is of common use among the astronomers of India
समन्वित	'symmetrical' is from सम्मिति 'symmetry' (सम् sym- + मिति- metry)

It was in the middle of the year 1946 that I was invited by Shri W. R. Parankh, the then Vice Chancellor of the Nagpur University to deliver a course of 17 lectures

on Indian scientific terminology for physical sciences. A few months later I was invited by the Provincial Government to come down to Nagpur in order to plan and prepare the series of scientific text books for the Nagpur University with the cooperation of University teachers. After three years of continuous work we are now glad to be able to bring out our first book of Intermediate Algebra in Hindi and Marathi.

The beginning of the Intermediate Algebra was made in February 1947 by Shri A. P. Shrivastava who was deputed to work with me by the Government of Madhya Pradesh. Shri Shrivastava planned and collected his material from authoritative works and from text books which are used at Indian Universities. Shri N. A. Shastri joined us in April 1947. He went over the material collected and helped the author with his suggestions and improvements. Questions set at Indian University examinations were added on with the help of Shri B. K. Paradkar. Every problem was solved by the author and answers were appended to the book.

The collection of the material, its sifting and revision had been conducted in English. The next step was the preparation of a complete list of algebraic terms, phrases and symbols for which Hindi equivalents were needed. These were made available to the author by me, Shri N. A. Shastri and Shri V. M. Dabadghao working in collaboration. Shri Shrivastava then took to the evolving of an algebraic style in Hindi. It was a fascinating venture. The entire book was recast a second and a third

time, until it was approved by all of us concerned. The Hindi version was next rendered into Marathi by Kumari A. Date. The two versions were carefully compared by Shri Shastri, Shri Shrivastava and Kumari Date. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the University of Nagpur, which while proposing that the book be recommended in the Intermediate Examination in Science of the University made a number of suggestions for improvement, which have been duly incorporated.

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon'ble Pt. Ravi Shankar Shukla, the Chief Minister of Madhya Pradesh. To the Hon'ble Shri D. K. Mehta, my debt of gratitude is immense. It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling. The Hon'ble Pandit Dwarika Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi, has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State. To Lt. Col. N. Ganguli the Education Secretary in 1947-48 and his successor Dr. V. S. Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements. Since the establishment of the Languages Department in January 1950, Shri A. R. Deshpande, the Under-secretary, has been extending to me his wholehearted cooperation.

My very special thanks are due to Lt. Col. Kunja

Lal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University. It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction. It was again due to him that the Nagpur University has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books, who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation. They have considered their work to be their reward.

Raghu Vira

*Hereafter follow three facsimile pages of the Bakhshali manuscript. Their contents are transliterated into Devanagari, followed by the same rearranged so as to be better understood, and finally an English translation—Raghu Vira

. Bakhshali Manuscript

Folio 13 verso

(a) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

.										०	फलत्रो १९
										१	
										१	
. . . . ४										२०	४
										१	॥ उदा ॥ करपा
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४
. . . . ४										१	४</

पुनान्य प्रत्यय

६०
१
१
+
२
२
२
२
+
४
१
५
-

फल ३६ ॥ मूलं न शायते

० ~ ~ ~ + ~ ~ ~ ~ + ~ ~ ~ ~ ~ फल

(c) Interpreted

(i) Continued from the obverse.

$$(a) \quad x^1 = \frac{19 \text{ dro}^* + 2a^* + 0 \text{ pra}^* + 2 \text{ ku}^*}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})} = 10$$

$$(b) \quad x^1 (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = 19 \text{ dro}^* + 2a^* + 0 \text{ pra}^* + 2 \text{ ku}^* < \text{whence } x^1 = 10 >.$$

(ii) *Example*. The capital of a certain banker is sixty. One half of it goes in loss and then he gains by one-third, next he loses one fourth of it and finally gains one-fifth, so that he has two gains. What is his gain and what is his loss and what the remainder and let that be stated.

$$\text{Solution.} \quad 60 (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{5}) = 36.$$

$$\text{Proofs (a) } x^1 = \frac{36}{(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{5})}, \text{ whence } x^1 = 60.$$

$$(b) 60 (1-\frac{1}{2}) (1+\frac{1}{2}) (1-\frac{1}{2}) (1+\frac{1}{2}) = 36.$$

$$(c) x^2 (1-\frac{1}{2}) (1+\frac{1}{2}) (1-\frac{1}{2}) (1+\frac{1}{2})$$

$$= 36 < \text{whence } x^2 = 60 >$$

Folio 42 recto

(a) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

१ ३	१ १ २ १ २	क ५४ . . . क्रियते ।	१ ॥ १ ॥
--------	-----------------------	----------------------	---------	-------

संख्यासार्धं युक्तं त्रयोदश सार्धं भवति

४० मा° १	१६० १	१३ १ २	. . .
-------------	----------	--------------	-------

. . दि एषां चोदां कृता जाता एकेन

१	२	२	. . .
---	---	---	-------

. दि सार्धं त्रयोदशानि क्रियन्ति

१	४	२७	क ५४ एषां भव.
---	---	----	---------------

. . एकेन लब्धं चत्वारिंशद्भिः

१	२	२	संयोज्यं कथं
---	---	---	--------------

 १
. . ॥ १३ . . एकोलमनि चत्वारिंशदसंघेऽप्युक्तं भवेत् १
. जि. भू. .

(b) Rearranged

सार्धं युक्तं त्रयोदश सार्धं भवति

४० मा° १	१६० १	१३ १ २ एषां चोदां कृता जाता एकेन.
-------------	----------	--------------	--------------------------------------

... सार्धं त्रयोदशमि क्षिमिति $\left| \begin{array}{c|c|c} १ & ४ & २७ \\ \hline १ & १ & २ \end{array} \right|$ क^२ ५४ एषां .

. एकेन लब्ध चत्वारिषु षडभि सपयने कथं $\left| \begin{array}{c|c|c|c} १ & . & . & . \\ \hline १ & . & . & . \end{array} \right|$ ४

. . एको लभति चत्वारि शतं स्य तु किं भवेत्

(c) Interpreted.

This contains portions of a solution that is not at present, fully understood. The preliminary work is missing and then comes the following proportion $40 \ 160 : 13\frac{1}{2} \ 5\frac{1}{2}$, or cancelling by 40 we get $1 \ 4 : \frac{27}{2} \ 5\frac{1}{2}$. The next part is missing but apparently was—

$$\begin{array}{rclcl} 1 & 4 & 6 & 24 & \\ , & 1 & 4 & 3 & 12 \\ & 1 & 4 & \frac{9}{2} & 18 \end{array}$$

Folio 47 recto

(a) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

. ऋ र									
विचक्षणं चमूस्तु पृतनास्तिस्रस्तिस्रश्चमू									
नीकीनिदशगुणामाहुरक्षोहनीबुधः ॥ अक्षोहि									
र १	य	३	३	३	३	३	३	१०	गु
ग १	ष	१	१	१	१	१	१	१	गुणितजा
न ५	प								
तु ३	ति	गी	रथ	२१८७०	एष अक्षोहि				
दा ॥ कश्चिद्राज			गज	२१८७०	प्रमाणं ॥ ॥				
			नर	१०९३५०	कुमारशत्रुदम ।				
			हय	६५६१०	. . . ि . . .				

(b) Rearranged

(१)

विचक्षणः

चमूस्तु पृतनास्तिस्रस्तिस्रश्च

अनीकीनि दशगुणां आहुरक्षोहनीबुधः ॥

अक्षोहि

र० १	एष	३	३	३	३	३	३	३	१०	गु०
ग० १	पति	१	१	१	१	१	१	१	१	
न० ५	गुणिता जाता	रथ	२१८७०							
तु० ३		गज	२१८७०							
		नर	१०९३५०							
		हय	६५६१०							

(२१८७००)

एव अक्षादयः-प्रमाण ॥

(२) उदा० ॥ कश्चिद् राजकुमार सृष्टः ।

(c) Interpreted

1

Apparently 3 *chamās* = 1 *pṛtanā*

3 *pṛtanās* = 1 *anilini*

10 *anilinīs* = 1 *akṣauhini*.

The statement means: a *patti* consists of 1 *raṭha* + 1 *gaja* + 5 *nara* + 3 *turaga* (i. e., 1 chariot + 1 elephant + 5 foot soldiers + 3 horsemen) and that an *akṣauhini* contains 3⁷.10 of each of these :

3⁷.10.1 chariots = 21,870 chariots

3⁷.10.1 elephants = 21,870 elephants

3⁷.10.5 footmen = 109,350 footmen

3⁷.10.3 horsemen = 65,610 horsemen

Total 218,700

उपोद्धात

प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या सर्वांगीण विकासाकरिता शिक्षणाचें माध्यम मातृभाषा असावे असे मानले जात असूनहि आजपर्यंत या देशांत मातृभाषेची नेहमी उपेक्षा होत गेली. म्हणून आतापर्यंत मातृभाषांत आधुनिक वैज्ञानिक विषयांवर ग्रंथांहि लिहिले गेले नाहींत आणि ज्यांच्या आधारें ग्रंथ लिहिता येतील असे पारिभाषिक शब्दहि नव्हते. अशा स्थितींत, कार्य कठीण असतांनाहि हिंदीला उच्च शिक्षणाचें माध्यम वनविषयाच्या स्तुल्य प्रयत्नांत सहकार्य करण्याच्या आन्तरिक प्रेरणेमुळे मी हिंदीमध्ये बीजगणित लिहिण्याचें कबूल केले आणि माध्यमिक परीक्षेकरिता जितके उपलब्ध ग्रंथ होते ते घेऊन त्यांतून सर्वग्राह्य होईल अशी सामग्री गोळा केली. पुस्तकाची रूपरेषा, त्याची सामग्री आणि विषयाचें योग्य विवरण यांवर पुरेसा वेळ घालवून मी हें पुस्तक लिहिण्यास प्रारंभ केला. यास सोपें आणि वाचनीय करण्याचा सर्वथैव प्रयत्न केला आहे. परिभाषा संपूर्ण विचारांना व्यक्त करणाऱ्या, संक्षिप्त आणि लवकर समजणाऱ्या वनविल्या आहेत. विषय समजण्यास सोपा करण्याकरिता प्रत्येक प्रकरणांत उदाहरणें दिली आहेत. उच्च गणितांत श्रेढ्यांचा अभिसार आणि अपसार हा विषय महत्वाचा असतो. त्याचा समावेश या पुस्तकाच्या कक्षे-याहेर आहे तरी तो विद्यार्थ्यांना समजण्यास सोपा जाईल या

दृष्टीने त्याचा उल्लेख यांत केला आहे. थेट्यांचा अनंतापर्यंत योग फोणत्या प्रकारे करता येतो हे गुणोत्तर श्रंढा आणि द्विपद प्रमेय या प्रकरणांत उदाहरणांसहित समजावून दिले आहे.

माझे पूज्य गुरु आणि महाकोशल महाविद्यालयाचे अनुभवी प्राध्यापक श्री. नी. आ. शास्त्री यांनी आपला पुष्कळसा वेळ खर्च करून योग्य त्या सुधारणा केल्या व बहुमोल सूचना दिल्या याबद्दल मी त्यांचा आभारी आहे.

या पुस्तकांतील सर्व पारिभाषिक शब्द प्रसिद्ध भाषाशास्त्री, आचार्य डॉ० रघुवीर यांनी दिले आहेत. त्यांच्या सतत साहाय्याने व प्रोत्साहनामुळेच बीजगणिताचे हे पुस्तक हिंदीमध्ये प्रस्तुत करण्याचे दुस्तर कार्य पूर्ण होऊ शकले. मीच काय पण सारा देश त्यांच्या आंग्ल-भारतीय-महाकोशाकरिता त्यांचा ऋणी आहे.

मराठीमध्ये या पुस्तकाचा सुंदर अनुवाद कुमारी अहिच्या दाते बी. ए. (आनसे) यांनी केला आहे. याकरिता मी त्यांना धन्यवाद देतो.

श्री. बी. के. पराडकर एम्. एस्. सी. यांनी अनेक परिक्षांच्या प्रश्नपत्रांमधील प्रश्न एकत्र करून या पुस्तकाचे प्रश्नसंग्रह तयार करण्यांत मला विशेष मदत केली. डॉ. वि. भि. कोलते यांनी हे पुस्तक भाषेच्या दृष्टीने चाचले आणि श्री. य. वि. ठोसर एम्. एस्. सी. यांनी या पुस्तकाची प्रुफ तपासली त्याबद्दल मी या सर्वांचा आभारी आहे.

अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव

अनुक्रमणिका

Foreward, by Lt. Col. K. L. Dubey	1-10
Introduction, by Dr. Raghu Vira	11-34
उपोद्घात— श्री अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव	35-36

बीजगणित

प्रकरण	पृष्ठ
१ पदसंहर्तीचें वर्गीकरण, चल आणि अचल राशी, परिमेय पूर्णांक, बीजीय श्रित, समानघात श्रित, संमितीय श्रित, समीकार, ऐकात्म्य, तिर्यग् गुणनाचा नियम, प्रश्नसंग्रह १.	३-१०
२ घातांक नियम क ^म ची परिभाषा, घातांक नियम. घन आणि ऋण राशींचे घात, क ^म चा अर्थ, प्रश्नसंग्रह २.	११-२४
३ करणी आणि संकर राशी मूळाची परिभाषा, मूळांचें प्रहसन,	

करणीची परिभाषा, परिमेयकरण, काल्प-
निक आणि संकर राशी, अनुपद्ध संकर
राशी, मापांकाची परिभाषा, प्रश्नसंग्रह ३.

२५-४०

४ समांतर श्रेढी

श्रेढीची परिभाषा, समान्तर श्रेढी, प्रचय,
सामान्य पद, श्रेढीच्या स पदांचा योग,
समांतर मध्यक, समांतर श्रेढीचं कांही
विशेष गुण, प्रश्नसंग्रह ४.

४१-५९

५ गुणोत्तर श्रेढी

गुणोत्तर श्रेढीची परिभाषा, साधारण
निष्पत्ति, सामान्य पद, स पदांचा योग,
गुणोत्तर मध्यक, प्रश्नसंग्रह ५, समान्तर
गुणोत्तर श्रेढी आणि त्याच्या स पदांचा
योग, अनंत श्रेढी, अनंत गुणोत्तर
श्रेढीचा योग, योगाकरिता आवश्यक
प्रतिबंध, समांतर गुणोत्तर श्रेढीचा
अनंतापर्यंत योग, आवर्त दशमिक, आवर्त
दशमिकाची गुणोत्तर श्रेढीच्या सहाय्याने
अर्ही, प्रश्नसंग्रह ६.

६०-८९

६ हरात्मक श्रेढी

परिभाषा, हरात्मक श्रेढी आणि समांतर
श्रेढीमधील संबंध, हरात्मक मध्यक, दोन
घन राशींमधील समांतर, गुणोत्तर,

आणि हरात्मक मध्यकांमधील संबंध, प्रश्नसंग्रह ७, प्राकृतिक संख्या, पहिल्या प्राकृतिक संख्यांचा योग, पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या वर्गांचा योग, पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग, य-संकेतना, प्रश्नसंग्रह ८.

९०-११०

७ द्विघात समीकार
द्विघात समीकाराचें साधन, द्विघात समीकाराचें मूळ, द्विघात समीकाराला दोनहून अधिक मूळें नसतात, मूळें वास्तविक समान आणि संकर असण्याकरिता प्रतिबंध, विवेचक, मूळांचा योग, मूळांचे गुणनफल, मूळें दिली असतांना समीकार वनविणें, एक चें घनमूळ, एक च्या घनमूळांचा योग शून्यासमान असतो, संकर घनमूळांमधील संबंध, प्रश्नसंग्रह ९, त्रिपद संहतीच्या अर्धामध्यें परिवर्तन, त्रिपद संहतीच्या चिह्नांमध्यें परिवर्तन, प्रश्नसंग्रह १०.

१११-१४७

८ समीकार
एक अशात असलेले समीकार, घात समीकार, व्युत्क्रम समीकार, प्रश्नसंग्रह ११, दोन अशात असलेले युगपत समीकार, समानघात समीकार, संमितीय समीकार,

प्रश्नसंग्रह १२, तीन अघात असलेले
समीकार, प्रश्नसंग्रह १३.

१४८-१९३

९. क्रमचय आणि संचय

क्रमचय आणि संचय यांच्या परिभाषा,
स विषम वस्तूंमधून प्रत्येक वेळी न
चस्तू घेतल्यावर वनणान्या क्रमचयांची
आणि संचयांची संख्या, हत संकेतना,
॥०॥ चे निर्वचन, संपूरक संचय, चतु-
र्या महत्तम अर्हकरिता न ची अर्हा,
सजातीय आणि विजातीय वस्तूंची
परिभाषा, सजातीयता विचारांत घेऊन
क्रमचयांची संख्या काढणे, क्रमचय
आणि संचय यांचे कठौण प्रश्न, प्रश्न-
संग्रह १४.

१९४-२२७

१०. गणितीय अनुमान

गणितीय अनुमानावरून प्रमेय सिद्ध
करण्याची रीति, प्रश्नसंग्रह १५.

२२८-२३३

११. द्विपद प्रमेय (घन पूर्णांक घात)

स द्विपदांचे गुणनफल, $(य+क)^n$ चा
विस्तार, $(य+क)^n$ समान स व्या
घाताच्या द्विपदांचे $(१+य)^n$ च्या रूपांत
परिवर्तन, प्रश्नसंग्रह १६, $(य+क)^n$
च्या विस्तारामधील कोणतेहि पद

काढणें, द्विपद प्रमेयाच्या साहाय्याने
त्रिपदाचा विस्तार, $(१+य)^४$ च्या
विस्तारामधील महत्तम पद काढणें,
 $(१+य)^४$ च्या विस्तारामधील महत्तम
गुणक काढणें, द्विपद प्रमेयाची उपपत्ति,
सम पदांमधील गुणकांचा योग विषम
पदांमधील गुणकांच्या योगासमान
असतो. द्विपद गुणकासंबंधी कांही प्रश्न,
प्रश्नसंग्रह १७.

२३४-२७०

१२ द्विपद प्रमेय (कोणताही घात)

$(१+य)^४$ चा स च्या सर्व अर्हाकरिता
विस्तार, भावश्यक प्रतिबंध, अभिसारी
आणि अपसारी श्रेढ्या, $(१-य)^{-४}$ च्या
विस्तारामधील सामान्य पद, $(१+य)^४$
च्या विस्तारामधील संख्येच्या दृष्टीने
महत्तम पद, द्विपद प्रमेयाचा प्रयोग,
प्रश्नसंग्रह १८.

२७१-३०४

१३ छेदा

परिभाषा, प्रतिच्छेदा, छेदा प्रमेय,
छेदांची उच्युक्तता, स्वाभाविक छेदा, घा
राशि, लक्षण आणि दशमिकांश, सामान्य
पद्धति, निरीक्षणाने लक्षणाचा निश्चय,
दशमिकांश नेहमी घन घेतला जातो,
छेदासारणी, छेदासारणीचा उपयोग,

प्रतिच्छेदासारणी, दिलेल्या आधारावरील
छेदा माहित असल्यास कोणत्याहि
आधारावरील छेदा काढणे, मापांक,
प्रश्नसंग्रह १९.

३०१-३२६

१४ घातांक आणि छेदा श्रेढी

कर चा विस्तार, वा करिता श्रेढी,
सी $\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = चा, छेदा (1 + y)$
स $\rightarrow \infty$

चा विस्तार, छेदा काढणे, वा राशीची
असंम्यता, प्रश्नसंग्रह २०.

३२७-३४९

५१ निश्चायक

समानघात रेखीय समीकारांचें निरसन-
फल, निरसन फलांना निश्चायकाच्या
रूपांत व्यक्त करणें, निश्चायकाचा वर्ण,
संघटक, स्तम्भ, पंक्ति, अग्र संघटक,
अग्र विकर्ण, निश्चायकाचा विस्तार,
निश्चायकाचे गुण, उपनिश्चायक, सह-
गुणक, दोहोमधील संबंध, प्रश्नसंग्रह २१.

३५०-३६८

उत्तरें.

३६९-३९६

पारिभाषिक शब्द

३९७-४०९

छेदा-सारणी

४१२-४१३

प्रतिच्छेदा-सारणी

४१४-४१५

शुद्धिपत्र

४१७

बीजगणित

प्रकरण पहिलें

१.१ पदसंहतींचें (expressions) वर्गीकरण (classification) तींत असलेल्या पदांच्या (terms) संख्येवरून करण्यांत येते. एकच पद असलेल्या राशीस एकपद (monomial), दोन पदे असलेल्या पदसंहतीस द्विपद (binomial), तीन पदे असलेल्या पदसंहतीस त्रिपद (trinomial) आणि ह्याप्रमाणेच अनेक पदे असलेल्या पदसंहतीस बहुपद (polynomial) पदसंहति म्हणतात.

कय, कय + ख, कय + खर + ग,

कय^म + खय^{म-१} + गय^{म-२} + + पय + फ, ही

क्रमशः एकपद, द्विपद, त्रिपद आणि बहुपद पदसंहतींची उदाहरणे आहेत.

१.२ चल (variable) आणि अचल (constant) गति

उदाहरण— प्रतिशत प्रतिवर्ष ख सरलव्याज आकारून क रू० मुदलाची १, २, ३, इत्यादि वर्षांनी येणारी रास य रू० ना दर्शविल्यास क, ख, आणि य यांमध्ये खालील संबंध निर्माण होतात.

$$\text{पहिल्या वर्षा अखेर, } y = k + \frac{x \times k}{100}$$

$$\text{दुसऱ्या वर्पा अखेर, } y = k + \frac{2x \times k}{100}$$

$$\text{तिसऱ्या वर्पा अखेर, } y = k + \frac{3x \times k}{100}$$

.....
.....

$$\text{चवदाव्या वर्पा अखेर, } y = k + \frac{14x \times k}{100}$$

य ची अर्हा भिन्न मुदतीकरता भिन्न येते. परंतु क आणि ख मात्र प्रथमपासून शेवटपर्यंत उदाहरणांत तेंच राहतात. हें घरील संबंधावरून दिसून येते. म्हणून य ला चल राशी आणि क, ख ला अचल राशी म्हणतात.

१.२१ जेव्हा दोन चल राशींपैकी एकीची अर्हा दुसरी-चर अवलंबून असते तेव्हा पहिल्या राशीला दुसऱ्या राशीचे श्रित (function) म्हणतात.

उदाहरणार्थ, $r = 3y + 4$ या संबंधांत

$$y = 1 \text{ दिला असल्यास } r = 7$$

$$y = -\frac{1}{3} \text{ दिला असल्यास } r = 4$$

म्हणून य ची अर्हा माहित असल्यास र ची अर्हा निश्चित होते. अर्थात् र ची अर्हा य च्या अर्हेवर अवलंबून आहे. परंतु य ला इच्छनुसार वाटेल ती अर्हा येता येते. म्हणून य-ला स्वतंत्र (independent) चल राशि आणि र ला परतंत्र (dependent) चल राशि म्हणतात.

संक्षेपार्थ, य ची निरनिराळी थितें थि(य), धा(य) थ्री(य).....अशी लिहिलीं जातात.

याचप्रकारें जेव्हा एखाद्या चल राशीची अर्हा, दुसऱ्या काही चल राशींच्या अर्हांवर अवलंबून असते तेव्हा त्या चल राशीस अनेक चल राशींचें थित म्हणतात.

उदाहरण— $l = 3y^2 + 4yr + 2r^2 + 3y + 2r + 7$
 $=$ थ्री (य, र)

१.३ य चें परिमेय (rational) पूर्णांक (integral) बीजीय (algebraic) थित—

$k_0 y^n + k_1 y^{n-1} + k_2 y^{n-2} + \dots + k_{n-1} y + k_n$ ह्या पदसंहतीत प्रत्येक पदांत य चा घात धन पूर्णांक असल्यास तिला य चें परिमेय पूर्णांक बीजीय थित म्हणतात.

ह्या परिभाषेंत केवळ 'य' लाच चल मानल्यामुळे केवळ त्याचाच विचार कला आहे. त्यामुळे $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ हे गुणक अपरिमेय किंवा मिश्र असले तरी वरील पदसंहति य चें परिमेय पूर्णांक थितच राहते.

१.४ बीजीय थितांत (algebraic functions) चल राशींचा उच्चतम घात एक, दोन, तीन.....किंवा स असल्यास त्या थितांना क्रमशः एकघाती, द्विघाती, त्रिघातीकिंवा स घाती थितें म्हणतात.

अनुच्छेद १.३ मध्ये दिलेल्या पदसंहतीत य चा चल राशीचा उच्चतम घात स असल्यामुळे ती पदसंहति 'स-घाती थित' आहे.

त्याचप्रमाणे, $कय + ख$, $कय^२ + खय + ग$ हीं क्रमशः एकघाती व द्विघाती बीजीय श्रितांची उदाहरणे आहेत. एकघाती आणि द्विघाती श्रितांना क्रमशः रेखीय (linear) आणि वर्गीय (quadratic) श्रितें असोह म्हणतात.

त्याचप्रमाणे $य$ आणि $र$ या दोन चल राशींच्या एकघाती आणि द्विघाती श्रितांची $कय + खर + ग$ आणि $कय^२ + खयर + गर^२ + घय + चर + ज$ हीं उदाहरणे आहेत.

१.५ समानघाती (homogeneous) श्रितें— जेव्हा $य$ आणि $र$ यांच्या परिमेय पूर्णांक श्रितांतील प्रत्येक पदाचा घात तोच असतो तेव्हा त्या श्रितास समानघाती श्रित म्हणतात.

उदाहरण— $कय + खर$, $कय^२ + खयर + गर^२$ हीं $य$ आणि $र$ यांचीं क्रमशः समान एकघाती, समान-द्विघाती श्रितें आहेत. चरील उदाहरणांत $क$, $ख$ आणि $ग$ ह्या कोणत्याहि अचल राशी आहेत.

संमितीय (symmetrical) श्रितें— दोन चल राशींच्या परिमेय पूर्णांक श्रितांत चल राशींच्या व्यतिहरणामुळे (interchange) परिवर्तन घडत नसल्यास त्या श्रितास त्या दोन राशींचे संमितीय श्रित म्हणतात.

परिमेय पूर्णांक श्रितांत दोहांपेक्षा अधिक चल राशी असतील आणि त्यांतील कोणत्याहि दोन राशींच्या व्यतिहरणामुळे त्यांत परिवर्तन घडून येत नसेल तर त्या श्रितास संमितीय श्रित म्हणतात.

उदाहरण १— $कय^२ + खय^२र + गय^२र^२ + खयर^२ + कर^२$ हें $य$ आणि $र$ यांचे संमितीय श्रित आहे.

उदाहरण २— $क + ख (य^२ + र^२ + ल^२) + य (रल + लय + यर)$ हे $य, र$ आणि $ल$ यांचे समितीय स्थित आहे.

१.६ समीकार (equation)— अव्यक्त(unknown) राशींच्या दोन पदसंहतींच्या समीकरणाने समीकार निर्माण हातो. समीकारामध्ये एक किंवा अधिक अव्यक्त राशी) त्याचप्रमाणे कांही थचल राशी असतात.

समीकारांतील अव्यक्त राशीचा उच्चतम घात हाच त्या समीकाराचा घात मानला जातो.

अव्यक्त राशीच्या ज्या अहेंमुळे समीकाराचें समाधान होतें (satisfies) तिला समीकाराचें मूळ (root) म्हणतात.

समीकारांतील अव्यक्तांना कोणतीहि अर्हा दिली असतांना जर समीकाराचें समाधान होत असेल तर त्या समीकारांस पेकात्म्य (identity) म्हणतात.

उदाहरण—

$$\frac{य}{य-क} + \frac{य}{य-ख} + \frac{य}{य-ग}$$

$$= \frac{क}{य-क} + \frac{ख}{य-ख} + \frac{ग}{य-ग} + ३$$

ह्या समीकाराचें, $य$ च्या कोणत्याहि एका अहेंने समाधान होतें म्हणून हा समीकार पेकात्म्य आहे.

जेव्हा अव्यक्ताच्या विशिष्ट अहेंकरिता समीकाराचें समाधान होते तेव्हा त्यास प्रतिबंधी समीकार (conditional equation) म्हणतात.

उदाहरण— $य^२ - ५य + ६ = ०$ चें समाधान $य$ च्या २ किंवा ३ या अर्हांनी होतें. म्हणून हा प्रतिबंधी समीकार

आहे. साधारणतः, प्रतिबंधी समीकारांपेवजी समीकार हाच शब्द वापरला जातो.

\equiv हें चिह्न समीकारदर्शक असून \equiv हें चिह्न ऐकाल्य दर्शक आहे.

१.७ तिर्यग् गुणनाचा (cross-multiplication) नियम

$$क_१य + ख_१र + ग_१ = ० \dots\dots\dots(अ)$$

$$क_२य + ख_२र + ग_२ = ० \dots\dots\dots(आ)$$

घरील समीकार सोडवावयाचे असल्यास (अ) समीकारास ख_१ ने आणि (आ) समीकारास ख_१ ने गुणा. नंतर (अ) समीकारांतून (आ) समीकार उणा करा म्हणजे—

$$य (क_१ख_२ - ख_१क_२) + ख_२ग_१ - ख_१ग_२ = ०$$

$$\text{अर्थात् } य = \frac{ख_१ग_२ - ख_२ग_१}{क_१ख_२ - क_२ख_१} \dots\dots\dots(इ)$$

आता (अ) किंवा (आ) यांमध्ये य च्या जागी त्याच्या प्राप्त अहंवा आदेश (substitution) करा. म्हणजे—

$$र = \frac{ग_१क_२ - क_१ग_२}{क_१ख_२ - ख_१क_२} \dots\dots\dots(ई)$$

(इ) आणि (ई) हीं फलें खालील प्रमाणे एकत्र लिहितां येतात.

$$\frac{य}{ख_१ग_२ - ख_२ग_१} = \frac{र}{ग_१क_२ - क_१ग_२} = \frac{१}{क_१ख_२ - ख_१क_२}$$

य, र आणि १ ह्यांच्या हरावरून असे प्रतीत होतें की (अ) आणि (आ) सारखे समीकार सोडवितांना य आणि र

यांच्या अर्ही, खाली दिलेल्या पद्धतीनुसार एकदम काढता येतात.

(अ) आणि (आ) या समीकरांतील र चे गुणक, स्थिरपदे, य चे गुणक आणि पुन्हा र चे गुणक क्रमशः पुढे दर्शविल्याप्रमाणे लिहा.



याणद्वारा सांघलेल्या गुणकांचे गुणाकार करा. अधोमुख वाणाने निर्दिष्ट केलेल्या गुणाकारांतून उन्मुख वाणाने निर्दिष्ट केलेला गुणाकार उणा करा. अशा प्रकारे येणाऱ्या राशी क्रमशः य, र आणि १ यांच्याशी अनुपाती (proportional) असतात. म्हणून—

$$\frac{y}{x_1, g_1 - g_1, x_2} = \frac{r}{g_1, k_2 - k_1, g_2} = \frac{1}{k_1, x_2 - x_1, k_2}$$

प्रश्नसंग्रह १

पुढील समीकार सोडवा —

$$(१) \quad ३य - २र - १ = ०$$

$$५य - ३र - ३ = ०$$

$$(૨) \quad y + r - ૧૫ = ૦$$

$$૪y + ૩r - ૫૨ = ૦$$

$$(૩) \quad ૨y - ૪r + ૭ = ૦$$

$$૪y + ૬r - ૨૧ = ૦$$

$$(૪) \quad ૩y + ૬r - ૧૦ = ૦$$

$$૨y - r + ૫ = ૦$$

प्रकरण दुसरें

घातांक नियम

(laws of indices)

२.१ जेन्हा स हा एक धन पूर्णांक असतो तेन्हा क ला क न स घेळां गुणून येणारा गुणाकार कⁿ ने दर्शविला जातो. अर्थात्

$$क^n = क \times क \times क \times \dots \dots \dots \text{स घेळां}$$

घरील कⁿ च्या परिभाषेत क ला आधार (base), आणि स ला क आधारचा घातांक (index) म्हणतात.

घर दिलेल्या परिभाषेच्या साहाय्याने पुढे दिलेले घातांक नियम सिद्ध करता येतात.

अन्यथा उल्लेख केल्याशिवाय आधारचा घात नेहमी धन पूर्णांकच समजला जाईल.

२.२ घातांक नियम —

(१) $क^y \times क^r = क^{y+r}$

(२) $क^y \div क^r = क^{y-r}$ जेन्हा $y > r$

$$= \frac{1}{क^{r-y}} \text{ जेन्हा } y < r$$

$$(३) (क^य)^र = क^{य \times र}$$

$$(४) (कख)^य = क^य \times ख^य$$

$$(५) \left(\frac{क}{ख} \right)^य = \frac{क^य}{ख^य}$$

२.३ (१) य आणि र धन पूर्णांक असल्यास

$$क^य \times क^र = क^{य+र}$$

आता, परिभाषेनुसार

$$क^य = क \times क \times \dots \dots \dots \text{य वेळां}$$

$$\text{आणि } क^र = क \times क \times \dots \dots \dots \text{र वेळां}$$

$$\text{म्हणून } क^य \times क^र = (क \times क \times \dots \text{य वेळां}) (क \times क \times \dots \text{र वेळां})$$

$$= क \times क \times \dots \dots \dots (य+र) \text{ वेळां}$$

$$= क^{य+र} \quad (\text{परिभाषेनुसार})$$

उपसिद्धांत (corollary)— हेंच फल अधिक विस्तृत स्वरूपांत मांडता येतें.

जर ल हाहि धन पूर्णांक असेल तर

$$क^य \times क^र \times क^ल = क^{य+र} \times क^ल$$

$$= क^{य+र+ल}$$

सामान्यतः क चा प्रत्येक घात धन पूर्णांक असल्यास

$$क^य \times क^र \times क^ल \times क^व \times \dots \dots \dots = क^{य+र+ल+व+\dots \dots \dots}$$

(२) य आणि र धन पूर्णांक असल्यास

$$क^य \div क^र = क^{य-र} \quad \text{जेव्हा } य > र$$

$$= \frac{१}{क^{र-य}} \quad \text{जेव्हा } य < र$$

સમજા ય > ર

$$ક^ય \div ક^ર = \frac{ક^ય}{ક^ર}$$

$$= \frac{ક \times ક \times ક \times \dots ય \text{ ઘેઝાં}}{ક \times ક \times ક \times \dots ર \text{ ઘેઝાં}}$$

(પરિમાપેનુસાર

અંશ આણિ છેદ યાંચ્યાંતીલ ર સાધારણ અવયવાંચા

લોપ કરૂન

$$= ક \times ક \times ક \times \dots (ય - ર) \text{ ઘેઝાં}$$

$$= ક^{ય-ર}$$

(પરિમાપેનુસાર

આતા ય < ર આહે એસે સમજા.

$$ક^ય \div ક^ર = \frac{ક \times ક \times \dots ય \text{ ઘેઝાં}}{ક \times ક \times \dots ર \text{ ઘેઝાં}}$$

અંશ આણિ છેદ યાંચ્યાંતીલ ય સાધારણ અવયવાંચા

લોપ કરૂન

$$= \frac{1}{ક \times ક \times \dots (ર - ય) \text{ ઘેઝાં}}$$

$$= \frac{1}{ક^{ર-ય}}$$

(પરિમાપેનુસાર

(૩) ય આણિ ર ધન પૂર્ણાંક એસેલ્યાસ

$$(ક^ય)^ર = ક^{યર}$$

$$(ક^ય)^ર = ક^ય \times ક^ય \times ક^ય \dots ર \text{ ઘેઝાં}$$

$$= (ક \times ક \times \dots ય \text{ ઘેઝાં}) \times (ક \times ક \times \dots ય \text{ ઘેઝાં}) \times \dots$$

$$(ક \times ક \times ક \times \dots ય \text{ ઘેઝાં}) \times \dots \text{એસે ર અવયવાપર્યંત}$$

$$= ક \times ક \times ક \times \dots યર \text{ ઘેઝાં}$$

$= क^य$ (परिभाषेनुसार)
 उपसिद्धांत— $(क^य)^र = (क^र)^य = क^य$

(४) य घन पूर्णांक असल्यास

$$\begin{aligned} (क \times ख)^य &= क^य \times ख^य && \text{(परिभाषेनुसार)} \\ (क \times ख)^य &= कख \times कख \times कख \dots \times य \text{ वेळां} \\ &= (क \times क \times क \times \dots य \text{ वेळां}) \times \\ &\quad (ख \times ख \times ख \times \dots य \text{ वेळां}) \\ &= क^य \times ख^य && \text{(परिभाषेनुसार)} \end{aligned}$$

उपसिद्धांत— $(कखग)^य = क^य \times ख^य \times ग^य$

$$\begin{aligned} \text{किंवा सामान्यतः } (क \times ख \times ग \times घ \dots)^य \\ = क^य \times ख^य \times ग^य \times घ^य \times \dots \end{aligned}$$

ह्यावरून, अनेक राशींच्या गुणाकाराचा य वा घात हा त्यांतील प्रत्येक राशीच्या य व्या घातांच्या गुणाकारासमान असतो.

(५) य हा घन पूर्णांक असल्यास

$$\begin{aligned} \left(\frac{क}{ख} \right)^य &= \frac{क^य}{ख^य} && \text{(परिभाषेनुसार)} \\ \left(\frac{क}{ख} \right)^य &= \frac{क \times क \times क \times \dots य \text{ वेळां}}{ख \times ख \times ख \times \dots य \text{ वेळां}} \\ &= \frac{क^य}{ख^य} && \text{(परिभाषेनुसार)} \end{aligned}$$

ह्यावरून दोन राशींच्या लब्धीचा य वा घात हा त्या राशींच्या य व्या घातांच्या लब्धीसमान असतो.

खालील फलाचें सत्यापन (verification) सहज करतां येईल.

$$\left(\frac{क^य \times ख^र \times \dots}{ग^ल \times \dots} \right)^स = \frac{क^मय \times ख^मर \times \dots}{ग^मल \times \dots}$$

२.४ धन आणि ऋण राशींचें घात— धन राशीचा गुणाकार, त्यांची संख्या कितीहि असली तरी, सदा धनच असतो, म्हणून एखाद्या धन राशीचा घात सम (even) किंवा विषम (odd) कोणताहि असला तरी तिचें त्या घातास उन्नयन करून येणारी राशी धनच असते.

उलट, ऋण राशीच्या गुणाकाराचें चिन्ह अवयवांच्या संख्येवर अवलंबून असतें.

कारण, ऋण राशीच्या अवयवांची संख्या सम असल्यास गुणाकार धन असतो, आणि ऋण राशीच्या अवयवांची संख्या विषम असल्यास गुणाकार ऋण असतो.

हें विधान खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

$$(-य)^१ = (-य) (-य) = य^२$$

$$(-य)^२ = (-य)^१ (-य) = य^२ (-य) = -य^३$$

$$(-य)^३ = (-य)^२ (-य)^२ = य^२ \times य^२ = य^४$$

आणि सामान्यतः

$$(-य)^{२स} = \left[(-य)^२ \right]^स = (य^२)^स = य^{२स}$$

$$(-य)^{२स+१} = (-य)^{२स} (-य) = -य^{२स} \times य = -य^{२स+१}$$

२.५ धन पूर्णांक व्यतिरिक्त घात— म, य आणि २ हे धन पूर्णांक नसल्यास क^स ची (२.१) मध्यें दिलेली परिभाषा

आणि तदनुसार प्रतिपादित घातांक नियम अर्थहीन होतात
हे आपणास लक्षांत ठेवले पाहिजे.

उदाहरणार्थ — 3^x मध्ये x वरून अवयवांची संख्या
 x आहे असा घोष होतो.

परंतु 4^{-3} किंवा 3^{-4} वरून 4 ला 4 ने $(-\frac{1}{2})$
घेळा किंवा 3 ला 3 ने (-4) घेळां गुणाचे असं गृहत्वास
अर्थबोध होत नाही.

आता, जर सिद्ध केलेले घातांकनियम हे y आणि x
च्या घन वा घन वा पूर्णांक वा भिन्न अर्थाकरिता सत्य
आहे असं गृहीत धरून आणि त्यावरून x ची घाटेल ती अर्धा
(घन किंवा घन किंवा भिन्न) असतांना k^x चा अर्थ लावू.

2.6 स हा $\frac{1}{2}$ साख्खा भिन्न आणि x घन पूर्णांक
असल्यास k^x अर्थात् $k^{\frac{1}{2}}$ चा अर्थ लावणें.

$$k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{1}{2}} \times \dots \dots \dots r \text{ घेळां}$$

$$= k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots \dots r \text{ पर्यंत}}$$

$$= k^{\frac{1}{2} \times r} \quad (\text{पहिल्या नियमानुसार})$$

$$= k$$

पण परिभाषेनुसार वाम पक्ष, $[k^{\frac{1}{2}}]^r$ असाहि लिहितां
येतो.

$$\text{अर्थात् } [k^{\frac{1}{2}}]^r = k$$

म्हणून $k^{\frac{1}{2}}$ चा र्था घात k आहे अर्थात् $k^{\frac{1}{2}}$ चे $2^{\text{वें}}$

मूल k^r ने प्रतिरूपित केलें जातें.

२.६१ $s=0$ असतांना k^s चा अर्थात् k^0 चा अर्थ लावणें— य आणि र च्या घन, ऋण, पूर्णांक किंवा भिन्न अर्हा असतांना घातांक नियम सिद्ध समजल्यास दुसऱ्या घातांक नियमानुसार

$$\frac{k^y}{k^r} = k^{y-r}$$

आता $r=y$ च्या

$$\text{म्हणून } \frac{k^y}{k^y} = k^{y-y}$$

किंवा $1 = k^0$

अर्थात् $k^0 = 1$

हे फल k च्या शून्य अर्हव्यतिरिक्त सर्व अर्हाकरिता सत्य आहे.

२.६२ $s = -r$ असतांना k^s चा अर्थात् k^{-r} चा अर्थ लावणें.

$$k^r \times k^{-r} = k^{r-r}$$

$$= k^0$$

$$= 1$$

$$\text{म्हणून } k^{-r} = \frac{1}{k^r}$$

२.६३ जिचा छेद घन पूर्णांक असून जी दोन पूर्णांक राशींनी तयार होते अशा लघ्वीच्या रूपांत प्रत्येक भिन्न राशि व्यक्त करता येते.

$\frac{त}{थ}$ हा राशीत त घन किया ऋण पण थ घन पूर्णांक

असल्यास $[आणि स = \frac{त}{थ}$ असल्यास क^त चा अर्थात्] क^त

चा अर्थ लावू.

पहिल्या घातांक नियमानुसार

$$\begin{aligned} & क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times क^{\frac{त}{थ}} \times \dots \text{थ वेळां} \\ &= क^{\left(\frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \frac{त}{थ} + \dots \text{थ पदापर्यंत}\right)} \\ &= क^{\frac{त}{थ} \times थ} \\ &= क^{\frac{त}{थ} \times थ} \end{aligned}$$

परंतु वाम पद = $(क^{\frac{त}{थ}})^{\frac{त}{थ}}$

म्हणून $(क^{\frac{त}{थ}})^{\frac{त}{थ}} = क^{\frac{त}{थ} \times \frac{त}{थ}}$

अर्थात् $(क^{\frac{त}{थ}})^{\frac{त}{थ}}$ चा थ वा घात क^त आहे.

म्हणून क^त हे क^त चे थ वे मूल आहे.

पुन्हा तिसऱ्या घातांक नियमानुसार

$$(क^{\frac{त}{थ}})^{\frac{त}{थ}} = क^{\frac{त}{थ}}$$

म्हणून क^त ही $(क^{\frac{त}{थ}})^{\frac{त}{थ}}$ अशीहि लिहिता येते.

ह्याचा अर्थ असा की क^त हा क^त चा थ वा घात आहे.

२.७ कांही उदाहरणे—

उदाहरण १— संक्षिप्त रूप द्या.

$$(अ) 3^4 \times 3^0 \quad (आ) \frac{2^4}{2^4} \quad (इ) (3^2)^4$$

$$(ई) (3 \times 2)^4 \quad (उ) \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$\text{आता (अ) } 3^4 \times 3^0 = 3^{4+0} = 3^4$$

$$(आ) \frac{2^4}{2^4} = 2^{4-4} = 2$$

$$(इ) (3^2)^4 = 3^4 \times 2 = 3^8$$

$$(ई) (3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4 = 243 \times 16 = 3888$$

$$(उ) \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

उदाहरण २ — पुढील राशि घन घात असलेल्या राशीत व्यक्त करा.

$$(अ) 3^{-2} \times 3^{-4} \times 3^3 \quad (आ) \frac{x^{-2} \times x^4 \times x^{-3}}{x^{-2} \times x^2 \times x^2}$$

आता (अ)

$$\begin{aligned} 3^{-2} \times 3^{-4} \times 3^3 &= 3^{-2-4+3} \\ &= 3^{-3} \\ &= \frac{1}{3^3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$$(आ) \frac{x^{-2} \times x^4 \times x^{-3}}{x^{-2} \times x^2 \times x^2}$$

$$= \frac{r^{4-2}}{x^{4-3} \times y^{2+3}}$$

$$= \frac{r^2}{x \times y^5}$$

उदाहरण ३ — संक्षिप्त रूप छा.

$$\left[\frac{3y^3 r^3 l}{y^3 \times r^4} \right]^{-\frac{2}{3}} \times \left[\frac{y^4 \times l^4}{r^3} \right]^{-\frac{1}{6}}$$

$$\left[\frac{3y^3 r^3 l}{y^3 \times r^4} \right]^{-\frac{2}{3}} \times \left[\frac{y^4 \times l^4}{r^3} \right]^{-\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{3^{-\frac{2}{3}} \times y^{-2} \times r^{-2} l^{-\frac{2}{3}}}{y^{-6} \times r^{-\frac{10}{3}}} \times \frac{y^{-1} l^{-1}}{r^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{r^{\frac{10}{3} + \frac{2}{3} - 2}}{y^{2+1-\frac{6}{3}} \times l^{1+\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{r^{\frac{8}{3}}}{y^{\frac{1}{3}} \times l^{\frac{4}{3}}}$$

उदाहरण ४ — सरलरूप छा—

$$\frac{1}{1+k^y-r+k^y-l} + \frac{1}{1+k^r-l+k^r-y} + \frac{1}{1+k^l-y+k^l-r}$$

$$\text{पदसंहति} = \frac{k^y}{k^y+k^r+k^l} + \frac{k^r}{k^r+k^l+k^y}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\text{क-ल}}{\text{क-ल} + \text{क-य} + \text{क-र}} \\
 & = \frac{\text{क-य} + \text{क-र} + \text{क-ल}}{\text{क-य} + \text{क-र} + \text{क-ल}} \\
 & = 1
 \end{aligned}$$

उदाहरण ५—

क^३ + क^३ख^३ + ख^३ ला क^३ - ख^३ ने गुणा

$$\text{क}^3 + \text{क}^3\text{ख}^3 + \text{ख}^3$$

$$\text{क}^3 - \text{ख}^3$$

$$\text{क} + \text{क}^3\text{ख}^3 + \text{क}^3\text{ख}^3$$

$$- \text{क}^3\text{ख}^3 - \text{क}^3\text{ख}^3 - \text{ख}$$

$$\text{क}$$

$$- \text{ख}$$

म्हणून इष्ट गुणाकार (क - ख) आहे.

प्रश्नसंग्रह २

(१) धन घात असणाऱ्या राशींत व्यक्त करा—

(अ) $y^3 \times r^{-4}$

(मा) y^{-2}

(इ) r^{-5}

(ई) $\frac{y^4 \times r^{-3}}{y^{-2} \times r^2}$

(उ) $y^3 \times y^{-3}$

$$(ऊ) \frac{य^{-८} \times र^{-८}}{य^{-३} \times र^{-३}}$$

(२) खालील राशींच्या अर्हा काढा—

$$(अ) ८^{\frac{३}{४}} \quad (आ) २७^{\frac{३}{४}} \times ३^{-\frac{३}{४}} \quad (इ) \frac{१६^{\frac{३}{४}} \times ८१^{-\frac{३}{४}}}{८^{\frac{३}{४}}}$$

$$(ई) \left(\frac{१२५}{६४}\right)^{-\frac{३}{४}}$$

$$(३) \text{ सरलरूप द्या— } \frac{य^३ \times (र \times ल)^४ (ल^३)^२ [य^३ र^३ ल]^२}{[य^३ \times र \times ल^३]^४}$$

(४) $[३^३]^३$ आणि $३^{३^३}$ यांपैकी कोणती संख्या मोठी आहे ?

$$(५) \text{ सरलरूप द्या— } \frac{३^{३^३}}{४(३^३)^३}$$

(६) (अ) $य^{\frac{३}{४}} + य^{\frac{३}{४}} + १$ हिला $य^{\frac{३}{४}} - १$ ने गुणा

(आ) $य^{\frac{३}{४}} + य^{\frac{३}{४}} र^{\frac{३}{४}} + र^{\frac{३}{४}}$ हिला $य^{\frac{३}{४}} - र^{\frac{३}{४}}$ ने गुणा

(इ) $(२य + १ + २य^{-१})$ हिला $(२य - १ + २य^{-१})$ ने गुणा

(७) $य^३ - र^३$ हिला $य^{\frac{३}{४}} - र^{\frac{३}{४}}$ ने भागा

(८) खालील पदसंहतींना सरलरूपे द्या—

$$(क) \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{l^{\frac{3}{2}}} \right]^4 \left[\frac{l^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} \right]^6$$

$$(ख) [y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}] [x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}]$$

$$(ग) [y^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{3}{2}}] \times [y^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{3}{2}}] \div y^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{3}{2}}$$

$$(घ) [y^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}]^2 \times \left[\frac{x^{-1} l^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \div y^{\frac{1}{2}} \times l^{\frac{1}{2}}$$

$$(ङ) \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

[फलकत्ता १९००]

$$(च) \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \div \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

[फलकत्ता १९०२]

$$(छ) \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \div \left[\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \times \left[\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

[फलकत्ता १९०३]

$$(ज) \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times$$

$$\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

[फलकत्ता १९०४]

(९) जर $x = y + y^{-1}$ असेल तर

(क) $y^2 + y^{-2}$ (ख) $y^3 + y^{-3}$ आणि $y^4 + y^{-4}$

यांना र च्या पदांत व्यक्त करा.

- (१०) जर $k^3 + ख^3 + ग^3 = ०$ असेल तर $[क + ख + ग]^3$
 $= २७ \times क \times ख \times ग$ हे दाखवा
- (११) $य^2 + र^2 + ल^2 = ०$ या समीकरांतील य, र आणि ल चे घात, पूर्णांक करण्यासाठी अवश्य तेवढी परिवर्तने करून, त्याचे
 $[य^२ + र^२ + ल^२ - २रल - २लय - २यर]^२$
 $= १२८ यरल (य + र + ल)$
 यांत परिवर्तन होते हे दाखवा.
- (१२) जर $क^य = ख$, $ख^र = ग$ आणि $ग^ल = क$ तर $यरल = १$ हे दाखवा
- (१३) जर $क^य = ठ$, $क^र = ट$ आणि $क^२ = [ठ^र \times ट^य]^ल$ तर $यरल = १$ हे दाखवा
- (१४) जर $क^{म+n} = [क^म]^न$ तर म ची अर्हा न च्या पदांत व्यक्त करा.

प्रकरण तिसरें

श्रुणी (surd) राशी आणि संकर (complex) राशी

३.१ स हा धन पूर्णांक असल्यास, $\sqrt[n]{k}$ ह्या राशीला मूल म्हणतात.

$\sqrt[n]{k}$ ह्या मूल चिन्हाखाली असणाऱ्या k ह्या राशीला आधार (base) आणि n ला मूळाचा घातांक (index) म्हणतात.

दुसऱ्या, तिसऱ्या,.....इत्यादि घणांच्या (order) मूळांना क्रमशः द्विघाति, त्रिघाति.....मूळ म्हणतात.

३.२ मूळांचें प्रहसन (reduction)— अशा राशीनेहि मूळगत राशि व्यक्त करता येते.

उदाहरणार्थ $\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$
घातांक नियमाच्या साहाय्याने खालील संबंध सहज सिद्ध करता येतात.

$$(१) (\sqrt[n]{k})^m = \sqrt[n]{k^m} = k^{\frac{m}{n}}$$

$$(२) (\sqrt[n]{k} \sqrt[n]{k}) = \sqrt[n]{k^2} = k^{\frac{2}{n}}$$

$$(३) \sqrt[n]{k^2} = (k^{\frac{2}{n}})^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{n}}$$

$$(४) \sqrt{k} \times \sqrt{x} = \sqrt{kx} = k^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$$

$$(५) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{k}{x}} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

३३ स हा घन पूर्णांक असल्यास $k^{\frac{1}{3}}$ ची अर्हा नेहमीच पूर्णतः काढता येते परंतु स घन पूर्णांक नसल्यास कांही कांही चलां $k^{\frac{1}{3}}$ ची अर्हा पूर्णतः निश्चित करता येत नाही. उदाहरणार्थ—४, ९, २२, ६२ यांची वर्गमूळे क्रमशः २, ३, १.५, २.५ ह्या परिमेय राशी येतात. परंतु २, ३, ५ यांची वर्गमूळे किंवा २, ३, ५ यांची घनमूळे काढण्याचा प्रयत्न केल्यास ती परिमेय राशींच्या रूपांत येत नाहीत असे दिसून येते.

क ही दिलेली राशि दुमण्या पद्धतीच्या पूर्ण स घात नसल्यास $\sqrt[k]{k}$ या राशीला करणी किंवा अपरिमेय राशि म्हणतात.

३३१ कोणत्याही दोन करणी राशींचे समवर्ण करणी राशींमध्ये परिवर्तन करता येते.

उदाहरणार्थ— $\sqrt[k]{k}$ आणि $\sqrt[x]{x}$ ह्या राशी क्रमशः $\sqrt[kx]{k^x}$ आणि $\sqrt[kx]{x^k}$ अशा द्विच्युत करता येतात.

ह्या पद्धतीने दिलेल्या राशींच्या अर्हा न काढता त्यांपैकी मोठी कोणती हे ठरविता येते. त्याचप्रमाणे दोन करणीचा गुणाकार किंवा भागाकार करता येतो.

उदाहरण १ — ${}^3\sqrt{10}$ आणि $\sqrt{11}$ यापैकी मोठी राशि कोणती ?

दोघांचाहि करणीघात समान केल्यास

$$\begin{aligned} {}^3\sqrt{10} &= {}^9\sqrt{10^3} \\ &= {}^9\sqrt{2000} \end{aligned}$$

$$\sqrt{11} = {}^9\sqrt{11^3}$$

$$= {}^9\sqrt{1331}$$

म्हणून $\sqrt{11}$ ही राशि ${}^3\sqrt{10}$ पेक्षा मोठी आहे.

उदाहरण २— $\sqrt{9}$ ला ${}^3\sqrt{4}$ ने गुणा.

$$\begin{aligned} \sqrt{9} \times {}^3\sqrt{4} &= {}^9\sqrt{9^3} \times {}^9\sqrt{4^2} \\ &= {}^9\sqrt{9^3 \times 4^2} \\ &= {}^9\sqrt{6480} \end{aligned}$$

उदाहरण ३—

${}^3\sqrt{2}$ ला $\sqrt{3}$ ने भागा.

$$\begin{aligned} {}^3\sqrt{2} \div \sqrt{3} &= {}^9\sqrt{2^3} \div {}^9\sqrt{3^2} \\ &= {}^9\sqrt{\frac{2^3}{3^2}} \end{aligned}$$

३.४ फ ही परिमेय आणि \sqrt{x} अपरिमेय राशि असल्यास फ + \sqrt{x} ही राशि वास्तविक राशीच अति सामान्य रूप आहे.

क + √ख आणि क - √ख यांना अनुबद्ध (conjugate) वर्ग-करणी (quadratic surds) म्हणतात.

दोन अनुबद्ध वर्ग करणींचा योग तसेच त्यांचा गुणाकार परिमेय असतात.

उदाहरण— (क + √ख) + (क - √ख) = २ क परिमेय राशि
(क + √ख) (क - √ख) = क^२ - ख परिमेय राशि.

पेक्षाद्या उदाहरणाचें उत्तर अपूर्णाकाच्या रूपांत येऊन त्याच्या हरांत क + √ख सारखी राशि असल्यास तें तसेच न ठेवण्याची गणितांत रुढि आहे. हरांतून अशा राशींचा लोप करण्याच्या पद्धतीस हराचें परिमेयकरण (rationalization) म्हणतात.

आता आपण क + √ख सारख्या राशीसंबंधी कांही प्रमेयें सिद्ध करूं.

३.५ प्रमेय १ ले—

क आणि य या परिमेय, आणि √ख व √र ह्या अपरिमेय राशी असून

क + √ख = य + √र असेल तर क = य आणि ख = र असतात.

सिद्धता— क + √ख = य + √र

म्हणून क - य + √ख = √र

दोन्ही पक्षांचा वर्ग करून

$$(क - य)^२ + ख + २√ख (क - य) = र$$

म्हणून २√ख (क - य) = र - ख - (क - य)^२

वरील संबंधांत वाम पक्ष अपरिमेय असून दक्षिण पक्ष परिमेय

राशि आहे. पण हें शक्य नाही म्हणून वरील संबंधांचा प्रत्येक पक्ष शून्यासमान व्हावयास पाहिजे.

$$\text{अर्थात् } \sqrt{x} (k-y) = 0$$

\sqrt{x} अपरिमेय असल्याने शून्यासमान होऊं शकत नाही. म्हणून $k-y=0$

$$\text{अर्थात् } k=y$$

आता $k + \sqrt{x} = y + \sqrt{r}$ ह्या संबंधांत, $k=y$ म्हणून $x=r$.

३.५१ प्रमेय २ रे— k , x , y आणि r परिमेय आणि $k + \sqrt{x}$ आणि $y + \sqrt{r}$ ह्यांचा योग, त्याच प्रमाणे गुणाकार परिमेय असल्यास

$$\sqrt{x} + \sqrt{r} = 0 \text{ आणि } k=y \text{ असतात.}$$

$$(k + \sqrt{x}) + (y + \sqrt{r}) \text{ परिमेय आहे.}$$

$$\text{म्हणून } \sqrt{x} + \sqrt{r} = 0 \text{ व्हावयास पाहिजे}$$

$$\text{म्हणून } \sqrt{x} = -\sqrt{r}$$

आता $(k + \sqrt{x})(y + \sqrt{r})$ परिमेय आहे.

$$(k + \sqrt{x})(y + \sqrt{r})$$

$$= ky + \sqrt{x}\sqrt{r} + \sqrt{x}y + \sqrt{r}k$$

$$\text{पण } \sqrt{r} = -\sqrt{x}$$

$$\text{म्हणून } \sqrt{r} \text{ पेवजी } -\sqrt{x} \text{ चा आदेश करून}$$

$$ky + \sqrt{x}(-\sqrt{x}) + \sqrt{x}y + (-\sqrt{x})k$$

$$= ky - x + \sqrt{x}y - \sqrt{x}k. \text{ पण ही परिमेय राशि}$$

आहे.

काल्पनिक राशींची कल्पना येण्याकरितां प्रथम
 $y^2 + 4 = 0$ हा समीकार विचारांत घ्या.

ज्यांचा वर्ग -4 येतो. अशाच अर्हा या समीकाराचे
 समाधान करतील परन्तु आतापर्यंत ज्ञात असलेल्या राशी
 अशा आहेत की त्यांचा वर्ग सदैव धनच येतो. म्हणून जिचा
 वर्ग ऋण आहे अशी राशि, आपल्याला आतापर्यंत माहित
 असलेल्या राशीपेशां भिन्न प्रकारची आहे. अशा राशीस
 काल्पनिक राशि म्हणतात.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} \text{ असे लिहितात.}$$

$$\text{म्हणून } \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$$

सामान्यतः श ने $\sqrt{-1}$ चें अभिधान करतात.

म्हणून $\sqrt{-4}$ ही राशि २ श अशा प्रकारे लिहिता येईल.

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \text{ अर्थात् श}^2 = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} \text{ अर्थात्}$$

$$\text{श}^3 = -\text{श}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = 1 \text{ अर्थात् श}^4 = 1$$

$$\text{आणि } [\sqrt{-1}]^{2s} = [(\sqrt{-1})^2]^s = (-1)^s$$

$$\text{स समपूर्णांक असल्यास } (\sqrt{-1})^{2s} = (-1)^s$$

$$= 1 \text{ अर्थात् श}^{2s} = 1$$

$$\text{आणि स विषमपूर्णांक असल्यास } (\sqrt{-1})^{2s} = (-1)^s$$

$$= -1 \text{ अर्थात् (श)}^{2s} = -1$$

$$(\sqrt{-1})^{2s+1} = (\sqrt{-1})^{2s} (\sqrt{-1})$$

त्याचप्रमाणे $(\sqrt{-1})^{2n+1} = (\sqrt{-1})^{2n} (\sqrt{-1})$
 $= \pm 1$ स च्या सम किंवा विषम अर्हे-
 नुसार

यावरून श चा कोणताहि घात श, -१, -श आणि १
 यांपैकी कोणत्यातरी एका रूपांत व्यक्त करतां येतो.

३.६२ आता, $y^2 - ३y + ३ = ०$ हा समीकार सोडवा.

$$y = \frac{३ \pm \sqrt{३}}{२}$$

या अर्हांनी समीकाराचें समाधान होते.

या अर्हांचें निरीक्षण केल्यास असें दिसून येईल की त्या,
 वास्तविक आणि काल्पनिक संख्यांचा अनुक्रमें योग आणि
 वियोग आहेत.

अशा प्रकारची 'घटना' असलेल्या राशींना संकर
 (complex) राशी म्हणतात.

संकर राशि— क आणि ख या दोन वास्तविक राशी
 असल्यास $k + शख$ हिला संकर राशि म्हणतात. ह्या राशी-
 तील क ला वास्तविक घटक आणि ख ला काल्पनिक
 (imaginary) घटक म्हणतात.

सामान्यतः, कोणतीहि राशि $(क + शख)$ ने दर्शविली
 जाते. हिच्यापासून, श शून्य असल्यास क ही वास्तविक
 राशि मिळते, आणि क शून्य असल्यास शख ही काल्पनिक
 राशि मिळते, आणि क तसेच ख यांपैकी एकहि शून्य नस-
 ल्यास $(क + शख)$ ही संकर राशि मिळते.

३.६३ अनुवृद्ध संकर राशि—ज्या दोन संकर राशींतील

वास्तविक घटक समान असून काल्पनिक घटक समान पण विरुद्ध चिह्नांचे असतात त्यांना अनुबद्ध संकर राशि म्हणतात.

उदाहरणार्थ— $य + शर$ आणि $य - शर$
 $३ + २२$ आणि $३ - २२$

३.७ कोणत्याही दोन संकर राशींचा योग, वियोग, गुणाकार आणि भागाकार संकर राशीच येतात.

$क + शख$, आणि $ग + शघ$ ह्या दोन संकर राशी घ्या.

यांचा योग आणि वियोग

$$(क + शख) \pm (ग + शघ)$$

$$= (क \pm ग) + श (ख \pm घ) = \text{संकर राशि.}$$

यांचा गुणाकार

$$(क + शख)(ग + शघ) = (कग - खघ) + श [कघ + खग] \\ = \text{संकर राशि}$$

यांचा भागाकार

$$\frac{क + शख}{ग + शघ} = \frac{(क + शख) (ग - शघ)}{(ग + शघ) (ग - शघ)} \\ = \frac{(क + शख) (ग - शघ)}{ग^२ - श^२ घ^२} \\ = \frac{(क + शख) (ग - शघ)}{ग^२ + घ^२} \\ = \frac{(कग + खघ) + श (खग - कघ)}{ग^२ + घ^२}$$

$$= \frac{\text{कग} + \text{खघ}}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2} + \text{श} \frac{\text{खग} - \text{कघ}}{\text{ग}^2 + \text{घ}^2}$$

= संकर राशि

३.८ साध्य १—

एखादी संकर राशि शून्यासमान असल्यास तिचा वास्तविक घटक शून्य असतो, त्याचप्रमाणे काल्पनिक घटकहि शून्य असतो.

आता, क + शख ही संकर राशि शून्यासमान दिली आहे.

$$\text{म्हणजेच क} + \text{शख} = 0$$

$$\text{किंवा क} = -\text{शख}$$

$$\text{दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून आणि श}^2 = -१ मांडून$$

$$\text{क}^2 = -\text{ख}^2$$

$$\text{किंवा क}^2 + \text{ख}^2 = 0$$

परंतु क आणि ख या दोन्ही वास्तविक राशी आहेत. म्हणून क^२ आणि ख^२ ह्या दोन्हीहि धन राशी आहेत.

तेव्हा, क^२ आणि ख^२ या संरणा प्रत्येकीं शून्य असल्याशिवाय क^२ + ख^२ या शून्य होणार नाही.

$$\text{म्हणून क} = 0 \text{ आणि ख} = 0$$

साध्य २— दोन संकर राशी परस्परसमान असल्यास त्यांचे वास्तविक घटक समान असतात. तसेंच त्यांचे काल्पनिक घटक समान असतात.

$$\text{क} + \text{शख} = \text{ग} + \text{शघ} \text{ असल्यास}$$

$$\text{क} = \text{ग} \text{ आणि ख} = \text{घ} \text{ आहेत हे सिद्ध करणे.}$$

$$क + शख = ग + शघ$$

$$म्हणून (क - ग) + श (ख - घ) = ०$$

साध्य १ चरून,

$$(क - ग) + श (ख - घ) = ० \text{ असल्यामुळे}$$

$$क - ग = ० \text{ आणि } ख - घ = ०$$

अर्थात् क = ग आणि ख = घ.

३.८१ दोन अनुबद्ध संकर राशींचा योग त्याचप्रमाणे त्यांचा गुणाकार वास्तविक असतात.

(क + शख) आणि (क - शख) ह्या अनुबद्ध संकर राशी आहेत.

$$\text{त्यांचा योग} = (क + शख) + (क - शख)$$

$$= २क = \text{वास्तविक राशि}$$

$$\text{त्यांचा गुणाकार} = (क + शख)(क - शख)$$

$$= क^२ - ख^२ = \text{वास्तविक राशि}$$

३.८२ मापांकाची (modulus) परिभाषा-कोणत्याही संकर राशीतील वास्तविक आणि काल्पनिक घटकांच्या वर्गयोगाच्या धन वर्गमूळास तिचा मापांक म्हणतात.

$$क + शख \text{ किंवा } क - शख \text{ या दोघांचाही मापांक } + \sqrt{क^२ + ख^२} \text{ आहे.}$$

साध्य ४— दोन संकर राशींच्या गुणाकाराचा मापांक त्यांच्या मापांकांच्या गुणाकारासमान असतो.

(क + शख) आणि (ग + शघ) ह्या दोन संकर राशी आहेत.

त्यांचे $\sqrt{क^२ + ख^२}$ आणि $\sqrt{ग^२ + घ^२}$ हे मापांक आहेत.

$$\begin{aligned}\text{आता, त्यांचा गुणाकार} &= (क + शख) (ग + शघ) \\ &= (कग - खघ) + श (खग + कघ)\end{aligned}$$

ह्या गुणाकाराचा मापांक

$$\begin{aligned}&= \sqrt{(कग - खघ)^२ + (खग + कघ)^२} \\ &= \sqrt{क^२ग^२ + ख^२घ^२ + क^२घ^२ + ख^२ग^२} \\ &= \sqrt{(क^२ + ख^२) (ग^२ + घ^२)} \\ &= \sqrt{(क^२ + ख^२)} \sqrt{(ग^२ + घ^२)} \\ &= \text{दिलेल्या संकर राशींच्या मापांकांचा गुणाकार}\end{aligned}$$

३.९ पक्षाचा उदाहरणाचें उत्तर अपूर्णाकाच्या रूपांत येऊन त्याच्या हरांत क + शख सारखी संकर राशि असल्यास तें तसेच न ठेवण्याची गणितांत रूढि आहे. या विधीस हराचें परिमेयकरण म्हणतात.

उदाहरण १— $\frac{३ + २श}{५ + ३श}$ चा हर परिमेय करा.

हराची अनुबद्ध संकर राशि ५ - ३श आहे. अंशाला आणि हराला ५ - ३श ने गुणून

$$\begin{aligned}\frac{३ + २श}{५ + ३श} \times \frac{५ - ३श}{५ - ३श} &= \frac{१५ + ६ + श (१० - ९)}{५^२ - ३^२श^२} \\ &= \frac{२१ + श}{२५ + ९}\end{aligned}$$

$$= \frac{२१ + १७}{३४}$$

उदाहरण २— (य + शर) चें वर्गमूळ काढा.

समजा ग + शघ हें (य + शर) चें वर्गमूळ आहे.

$$\text{अर्थात् } (ग + शघ)^२ = (य + शर)$$

$$\text{किंवा } ग^२ - घ^२ + २ शगघ = य + शर$$

वास्तविक घटकांचे तसेच काल्पनिक घटकांचे समीकरण मांडून,

$$य = ग^२ - घ^२ \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{आणि } २ = २गघ \dots\dots\dots(२)$$

हे दोन समीकार ग आणि घ यांच्याकरिता सोडविल्यास

$$ग = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^२ + ४} + य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$\text{आणि } घ = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^२ + ४} - य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

ग आणि घ यांच्या या अर्हांपैकी ज्या (१) आणि (२) ह्या समीकारांचे समाधान करतात त्यांचा ग आणि घ यांच्या ठिकाणी आदेश करून इष्ट वर्गमूळ मिळते.

प्रश्नसंग्रह ३

- (१) सरळतम रूपांत प्रहसन करा.
 $\sqrt{१५०}$, $^३\sqrt{३२०}$, $^४\sqrt{१४४}$, $^४\sqrt{७६८}$, $^५\sqrt{६०८}$
- (२) खालील राशींचे परिमेयकारक काढा.
 (१) $७ + \sqrt{३}$, (२) $३ + \sqrt{५}$ आणि
 (३) $\sqrt{३} + \sqrt{२}$
- (३) खालील राशींचे परिमेयकारक काढा.
 (१) $^३\sqrt{७ + २}$, (२) $^३\sqrt{५ + ३}$, आणि
 (३) $^३\sqrt{३} + ^३\sqrt{२}$
- (४) खालील राशींच्या हरांचं परिमेयकरण करा आणि शक्य तेथे सरळरूप घ्या.
 (१) $\frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}$, (२) $\frac{१}{१ + \sqrt{२} + \sqrt{३}}$
 (३) $\frac{१}{१ - \sqrt{३} + \sqrt{५}}$
- (५) सरळरूप घ्या

$$\frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{५}-\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+\sqrt{२}} - \frac{२(\sqrt{५}-\sqrt{२})}{\sqrt{८९}-२८\sqrt{१०}}$$
- [मद्रास]
- (६) खालील राशींच्या अनुवृद्ध राशी काढा.
 (१) $३ + २श$, (२) $१ + ३श$ आणि (३) $७ + ५श$
- (७) गुणाकार करा.
 (१) $(३ + २श) \times (५ - श)$
 (२) $(७श - ३) \times (६ - ४श)$

(८) खालील राशींच्या हरांचे परिमेयकरण करा.

(क) $\frac{1}{3+2\sqrt{5}}$ (ख) $\frac{1}{7+4\sqrt{5}}$ (ग) $\frac{1}{3+\sqrt{-2}}$

(घ) $\frac{(3+2\sqrt{5})(4-3\sqrt{5})}{(3-2\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})}$.

(९) क + शख ज्या रूपांत व्यक्त करा.

(१) $\frac{3+4\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}$ (२) $\frac{1+2\sqrt{5}}{3-4\sqrt{5}}$;

(३) (क + श) (३ - २शख)

आणि (४) (२ + २ श) (१ + $\sqrt{3}$ श)

(१०) य आणि र ज्या ज्या अर्हांनी खालील समीकारांचे समाधान होईल त्या काढा.

(१) य + शर = २ - ३श

(२) २य - शर = ६ + ५श

(३) (य + ३श) (१ + शर) = ८ - श

(४) (य + र + ३श) = ५ + ३शर

(११) खालील राशींचे वर्गमूल काढा.

(१) $-7+2\sqrt{5}$ श, (२) $5+12\sqrt{5}$, (३) $3-4\sqrt{5}$

(१२) जर $(क + श ख)^{-1} = म$ (क - शख) असेल तर

$$क^2 + ख^2 = \frac{2}{म} \text{ आहं हें दाखवा.}$$

(१३) जर य = कोज्या इ + श ज्या इ तर

$$य^{-1} = \text{कोज्या, इ - श ज्या इ हें दाखवा.}$$

प्रकरण चवथें

समान्तर श्रेढी

(arithmetical progression)

४. १ एखाद्या दिलेल्या नियमानुसार निर्माण झालेल्या राशी क्रमाने मांडल्यास त्या मांडणीस श्रेढी (series) म्हणतात.

आता, २, ५, ८, ११ या मांडणीतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदांत ३ मिळवून निर्माण होत म्हणून या मांडणीस श्रेढी म्हटलें आहे.

त्याचप्रमाणे ५, २५, १२५, ६२५ या मांडणीतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदास ५ ने गुणून निर्माण होत म्हणून या मांडणीस श्रेढी म्हटलें आहे.

परंतु २, ७, -१०, १५, २४ ह्या मांडणीतील पदें कोणत्याहि नियमानुसार निर्माण होत नाहोत म्हणून हिला श्रेढी म्हणता येत नाही.

४. २ ज्या श्रेढीतील प्रत्येक पद पूर्वीच्या पदांत एखादी निश्चित राशि मिळवून किंवा त्यांतून उणें करून निर्माण होत तीस समान्तर श्रेढी म्हणतात.

या निश्चित राशीस समांतर श्रेढीचा प्रचय (common difference) म्हणतात.

२, ४, ६, ८,...या आणि ५, २, -१, -४...या समांतर श्रेढी असून २ आणि -३ हे त्यांचे प्रचय आहेत.

४.३ कोणत्याही समांतर श्रेढीच्या आद्य पदाचे 'क' ने, अन्त्यपदाचे 'अ' ने, प्रचयाचे 'च' ने, पदांच्या एकंदर संख्येचे 'स' ने आणि श्रेढीयोगाचे 'यो' ने साधारणतः अभिधान केले जाईल.

४.४ समांतर श्रेढी संबंधी कांही मूलभूत सूत्रे—

(१) आद्य पद 'क' आणि प्रचय 'च' असलेल्या समांतर श्रेढीतील कोणतेही पद काढता येते ते असे—

आद्य पद क आहे आणि प्रचय च आहे

म्हणून २रे पद $k + च$

” ३रे पद $k + २च$

” ४थे पद $k + ३च$

” १५वे पद $k + १४च$

” तवे पद $k + (त - १) च$

यावरून, जर त व्या पदाचे अभिधान पत ने केले तर

$पत = k + (त - १) च$(अ)

जर अन्त्यपद 'अ' 'स' चे पद असल्यास

$पस = अ = k + (स - १) च$(आ)

(२) श्रेढीतील स पदांचा योग

योगाचे अभिधान 'यो' ने करून

यो = क + (क + च) + (क + २च) + + (अ - च) + अ
 हाच योग उत्क्रमाने (in the reverse order)
 लिहिल्यास

$$\text{यो} = \text{अ} + (\text{अ} - \text{च}) + (\text{अ} - २\text{च}) + \dots\dots\dots + (\text{क} + \text{च}) + \text{क}.$$

या दोन फलांचा योग करून

$$२\text{यो} = (\text{क} + \text{अ}) + (\text{क} + \text{अ}) + \dots \text{स घेळा.}$$

$$\text{म्हणून } २\text{यो} = \text{स} (\text{क} + \text{अ})$$

$$\text{म्हणून यो} = \frac{\text{स}}{२} (\text{क} + \text{अ}) \dots\dots\dots (इ)$$

(आ) संयंघांतील अर्धा घेतल्यास

$$\text{यो} = \frac{\text{स}}{२} [\text{क} + \text{क} + (\text{स} - १)\text{च}]$$

$$= \frac{\text{स}}{२} [२\text{क} + (\text{स} - १)\text{च}] \dots\dots\dots (ई)$$

आतां (इ) आणि (ई) या संयंघा करून असं दिसून येतं की

(१) श्रेढीतील आद्य आणि अंत्यपद आणि पदांची संख्या माहीत असल्यास किंवा

(२) श्रेढीतील आद्य पद, प्रचय आणि पदांची एकंदर संख्या माहीत असल्यास, श्रेढीयोग काढतां येतो

उदाहरण १— १०, ११½, १३, १४½.....या श्रेढीच्या १४ पदांचा योग काढा.

या श्रेढीतील आद्य पद १०, पदसंख्या १४ आणि प्रचय $\frac{३}{२}$ आहे

तेव्हा (ई) चा उपयोग करून

$$\begin{aligned} \text{यो} &= \frac{18}{2} [2 \times 10 + (18 - 1) \times \frac{3}{2}] \\ &= 9 [20 + \frac{39}{2}] \\ &= 296\frac{1}{2} \end{aligned}$$

उदाहरण २—एका समांतर श्रेढीचे आद्य पद १० आणि १८ वे पद ९५ आहे तर तिचा प्रचय आणि तिच्या २० पदांचा योग काढा.

समजा प्रचय च आहे तर (४.४ अ) वरून

$$१८\text{वे पद} = १० + (१८ - १) च$$

$$\text{म्हणून } ९५ = १० + १७ च$$

$$\text{म्हणून च} = ५$$

अतः २० पदांचा योग, (४.४ ई वरून),

$$\begin{aligned} &= \frac{20}{2} [2 \times 10 + (20 - 1) \times ५] \\ &= १० [२० + ९५] \\ &= ११५० \end{aligned}$$

यावरून, दिलेल्या श्रेढीचा प्रचय ५ आणि योग ११५० आहे.

उदाहरण ३—(८ त - ५) हे त वे पद असलेल्या समांतर

श्रेढीच्या १८ पदांचा योग काढा.

$$\text{त} = ८ त - ५$$

त पेचजी १, २, ३.....चा आदेश करून

$$p_1 = ८.१ - ५ = ३$$

$$p_2 = ८.२ - ५ = ११$$

$$p_3 = ८.३ - ५ = १९$$

$$\text{आता, प्रचय} = p_2 - p_1 = ११ - ३ = ८$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{यो.८} &= \frac{१८}{२} [२ \times ३ + १७ \times ८] \\ &= ९ [६ + १३६] \\ &= १२७८\end{aligned}$$

४.५ समांतर मध्यक (mean)

क आणि ख या दोन राशींच्या मध्ये म चा निवेश करून जर क, म आणि ख समांतर थेटांत असतील तर 'म' ला क आणि ख यांमधील समांतर मध्यक म्हणतात.

क, म, ख ही समांतर थेटा असल्यामुळे

$$म - क = ख - म$$

$$\text{म्हणून } म = \frac{क + ख}{२}$$

यावरून कोणत्याही दोन राशींच्या समांतर मध्यकाची अर्ही त्या दोन राशींच्या योगाच्या अर्धा असते.

समांतर मध्यक

क आणि ख या कोणत्याही दोन राशींच्या मध्ये म_१, म_२, म_३, म_न या राशींचा निवेश करून जर क, म_१, म_२, म_३, म_न, ख ही समांतर थेटा होत असेल तर म_१, म_२, म_न, यांना क आणि ख यांमधील समांतर मध्यक म्हणतात.

४.६ क आणि ख यांच्यामध्ये त समांतर मध्यकांचा निवेश करणें.

समजा की,

$m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$ हीं इष्ट मध्यकें आहेत. तेव्हा मध्यकांच्या परिभाषेनुसार,

क, $m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$, ख ही $(t+2)$ पदांची समांतर श्रेणी आहे. यांतील आद्य पद क आणि अंत्य पद ख आहे. च हा प्रचय घेतल्यास (४.४ आ) वरून,

$$ख = क + (t+1) च$$

$$\text{अथवा } च = \frac{ख - क}{t+1}$$

म्हणून $m_1 =$ दुसरें पद.

$$= क + \frac{ख - क}{t+1}$$

$m_2 =$ तिसरें पद.

$$= क + 2 \frac{(ख - क)}{t+1}$$

.....

.....

$m_t = (t+1)$ वे पद.

$$\text{म्हणून } = क + t \frac{(ख - क)}{t+1}$$

तेव्हा m_1, m_2, \dots, m_t च्या क्रमशः

$$क + \frac{१-क}{त+१}, क + २ \frac{ख-क}{त+१}, क + त \frac{(ख-क)}{त+१}$$

एव अर्हा आहेत.

उदाहरण— ५१ आणि १९ यांमध्ये ८ समान्तर मध्यकांचा निवेश करा.

समजा की,

$m_1, m_2, m_3 \dots m_8$ ही दृष्ट मध्यकें आहेत.

म्हणून ५१, $m_1, m_2 \dots m_8, १९$ ही १० पदांची समान्तर श्रेढी आहे. त्यांतील आद्य पद ५१ आणि अंत्य पद १९ आहे. प्रत्येक च घेतल्यास

$$१९ = \frac{११}{२} + ९ च$$

$$\text{म्हणून } च = \frac{३}{२}$$

यावरून ५१ आणि १९ यांमध्ये ७, ८१.....१७१ ही दृष्ट समान्तर मध्यकें आहेत

४.७ समान्तर श्रेढीचें आद्य पद, प्रत्येक आणि योग दिलेला असल्यास पदसंख्या काढणे.

आद्य पद क, प्रत्येक च, योग यो आणि पदसंख्या स यांमध्ये आपण (४.६) मध्ये जो संबंध प्रस्थापित केला आहे त्यांतच क, च आणि यो ज्या दिलेल्या अर्हांचा आदेश केल्यास जो जर्हा निश्चित होत.

म्हणून

$$यो = \frac{स}{२} [२क + (स-१) च]$$

$$२यो = २सक + (स^२ - स) च$$

$$म्हणून चस^२ + (२क - च) स - २यो = ०$$

हा स चा वर्गसमीकार असल्यामुळे आपणांला सामान्यतः स च्या दोन अर्हा मिळतात.

आता, स ने पदसंख्येचे अभिधान होत असल्यामुळे तो अवश्य धनपूर्णांक असाचयास पाहिजे. म्हणून आपणांला स च्या वरील अर्हांपैकी केवळ धनपूर्णांक अर्हाच घेतली पाहिजे. कृण किंवा भिन्न अर्हा-तिला कोणताच अर्थ नसल्यामुळे त्याज्य मानली पाहिजे.

उदाहरण १— ५१, ४८, ४५ ह्या श्रेढीचा योग ३९६ आहे. तर पदांची संख्या काढा.

समजा स पदसंख्या आहे.

$$प्रचय = ४८ - ५१ = -३$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } ३९६ &= \frac{स}{२} [२ \times ५१ + (स - १) (-३)] \\ &= \frac{स}{२} [१०२ - ३स + ३] \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून } ३स^२ - १०५स + ७९२ = ०$$

$$\text{किंवा } स^२ - ३५स + २६४ = ०$$

$$\text{म्हणून } स = ११ \text{ तसेच } स = २४$$

म्हणून दिलेली श्रेढी ११ किंवा २४ पदांची आहे.

उदाहरण २— १, ४, ७..... या श्रेढीच्या किती पदांचा योग २८७ होईल ?

समजा स ही इष्ट पदसंख्या आहे.

येथे $k=1$, $y_0=249$ आहे.

आता प्रचय $= 4 - 1 = 3$

तेव्हा $249 = \frac{s}{2} [2 \times 1 + (s-1)3]$

$498 = 2s + 3s^2 - 3s$

म्हणून $3s^2 - s - 498 = 0$

म्हणून $s = 18$ तसेच $s = -\frac{41}{3}$

s ची $-\frac{41}{3}$ ही ऋण किंवा भिन्न अर्हा त्याज्य

असल्यामुळे इष्ट पदसंख्या 18 आहे.

४.८ समांतर श्रेढीचे कांही महत्वाचे गुणधर्म—

(१) समांतर श्रेढीच्या प्रत्येक पदांत एखादी संख्या मिळविली किंवा प्रत्येक पदांतून एखादी संख्या उणें केली तर निर्माण होणारा नवीन श्रेढीही समांतर श्रेढी असते, आणि तिचा प्रचय दिलेल्या श्रेढीच्या प्रचयाएवढाच असतो.

समजा,

$k, k+1, k+2, k+3, \dots$ ही एक समांतर श्रेढी आहे.

तिच्या प्रत्येक पदांत x मिळविल्यास $(k+x),$

$(k+1+x), (k+2+x), \dots$ ही नवीन

श्रेढीही समान्तर श्रेढीच आहे हे उघड आहे. तिचा प्रचय

$$\begin{aligned}
&= (क + २च + ख) - (क + च + ख) \\
&= (क + च + ख) - (क + ख) \\
&= च
\end{aligned}$$

यावरून वरील विधानाची सत्यता सिद्ध होते.

(२) समांतर श्रेढीतील प्रत्येक पदाला पक्षाद्या अचल संख्येने गुणून येणारी पदं समांतर श्रेढीत असतात. आणि ह्याच गुणकाने दिलेल्या श्रेढीच्या प्रचयास गुणून येणारी संख्या नवीन श्रेढीचा प्रचय असते.

समजा,

क, क + च, क + २च.....ही एक दिलेली समांतर श्रेढी आहे.

तिच्या प्रत्येक पदाला ख ने गुणल्यास क + ख, (क + च)ख, (क + २च) ख,.....ही नवीन श्रेढीही समांतर श्रेढीच आहे हें उघड आहे.

$$\begin{aligned}
\text{तिचा प्रचय} &= (क + च) ख - कख \\
&= चख
\end{aligned}$$

यावरून वरील विधानाची सत्यता सिद्ध होते.

४.९ उदाहरण १—

एका समांतर श्रेढीच्या लागोपाठच्या तीन पदांचा गुणाकार १०९ असून त्यांचा योग १५ आहे, तर ती पदं काढा.

समजा की, क-च, क, क+च हे तीन पद समांतर श्रेणीत आहेत.

यांचे गुणनफल १०५ आहे

$$\therefore क (क^2 - च^2) = १०५ \dots\dots\dots (१)$$

यांचा योग १५ आहे

$$\therefore क - च + क + क + च = १५$$

$$\therefore ३क = १५$$

$$\text{किंवा } क = ५ \dots\dots\dots (२)$$

(१) मध्ये क=५ ठेवून

$$५ (२५ - च^2) = १०५$$

$$२५ - च^2 = २१$$

$$च^2 = ४$$

$$च = \pm २$$

म्हणून च=२ घेतल्यास ती पदे ३, ५, ७ आहेत आणि च = -२ घेतल्यास ती पदे ७, ५, ३ आहेत.

उदाहरण २— क, ख, आणि ग समांतर श्रेणीत असल्यास

$$(१) \frac{१}{खग}, \frac{१}{गक}, \frac{१}{कख}$$

(२) ख+ग, ग+क, क+ख ह्या दोन समांतर श्रेणी आहेत हे दाखवा.

(१) क, ख, ग ही समांतर श्रेणीतील पदे आहेत,

त्यांना $\frac{१}{कखग}$ ने गुणा.

क ख ग हीं पदे सुद्धा समान्तर श्रेढीत आहेत
कखग, कखग, कखग [अनुच्छेद ४.८ — (२)]

म्हणून $\frac{१}{खग}$, $\frac{१}{कग}$, $\frac{१}{कख}$ समांतर श्रेढीत आहेत

(२) जर ख + ग, ग + क, आणि क + ख समांतर श्रेढीत असतील तर

$$(ग + ख) - (ख + ग) = (क + ख) - (ग + क)$$

असाचयास पाहिजे.

$$म्हणजेच क - ख = ख - ग$$

हा प्रतियोग, क, ख, ग हीं पदे समान्तर श्रेढीत असल्यामुळे क, ख, ग कडून पाळला जातो.

म्हणून ख + ग, ग + क, क + ख हीं पदे समांतर श्रेढीत आहेत.

प्रश्नसंग्रह ४

(१) खालील श्रेढींचे सवें पद लिहा.

(अ) ९, ८ $\frac{१}{२}$, ७ $\frac{१}{२}$,

(आ) २, ९, १६,

(इ) ४, १३, २२,

(ई) $\frac{१}{क}$, $\frac{२}{क}$, $\frac{३}{क}$,

(उ) $\frac{१}{स}$, $\frac{स+१}{स}$, $\frac{२स+१}{स}$, ...

(२) खालील श्रेढींचे योग काढा.

(अ) ३, ७ $\frac{१}{२}$, ११ $\frac{१}{२}$, २० पदापर्यंत

(आ) ७५, ७२, ६९, १६ पदापर्यंत

(इ) $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$, १, ३० पदापर्यंत

(ई) ४, $\frac{१३}{४}$, $\frac{५}{२}$, १० पदापर्यंत

(उ) २.३५, ३.७, ५.०५, २१ पदापर्यंत

(ऊ) $\frac{३}{\sqrt{५}}$, $\sqrt{५}$, $\frac{७}{\sqrt{५}}$, २५ पदापर्यंत

(ए) (३क-५ख), (४क-७ख), (५क-९ख),
...स पदापर्यंत

(ऐ) १, ३, ५, ७,स पदापर्यंत

निवेश करा:—

- (३) (अ) १३ आणि ६३ यांच्या मध्ये ११ मध्यकांच
 (आ) २ आणि ५७ यांच्या मध्ये १० मध्यकांचा.
 (इ) १ आणि ५१ यांच्या मध्ये ७ मध्यकांचा.
 (ई) स^२ आणि १ यांच्या मध्ये स मध्यकांचा.
 (उ) क आणि ख यांच्या मध्ये (२स + १) मध्यकांचा.
 (उ) मध्ये मध्यपदाची अर्हा काढा.
- (४) एखाद्या समांतर श्रेढीच्या प्रत्येकी दोन दोन अनुगामी पदांमध्ये मध्यकांच्या समान संख्यांचा निवेश केल्यास निष्पन्न होणारा श्रेढी समांतर श्रेढीच असते हे दाखवा.
- (५) एका समांतर श्रेढीचे १०वे पद १२ आणि २०वे पद १७ आहे तर तिच्या १५ पदांचा योग काढा.
- (६) एका समांतर श्रेढीचे १०वे पद २५ आणि २५वे पद ५५ आहे तर ५०वे पद आणि ५० पदांचा योग काढा.
- (७) एखाद्या समांतर श्रेढीचे स वे पद $\frac{1}{6}$ (१०-७स)
 असल्यास तिच्या स पदांचा योग $\frac{स}{१२}$ (१३-७स)
 येईल हे दाखवा.
- (८) समांतर श्रेढीत असलेल्या तीन संख्यांचा योग ५१ आणि पहिल्या व तिसऱ्या संख्यांचा गुणाकार २७३ आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

(९) समांतर श्रेढीत असणाऱ्या पांच संख्यांचा योग २५ असून पहिल्या आणि पांचव्या पदांचा गुणाकार १६ आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

[नागपुर १९२९]

(१०) सहा पदे असलेल्या कोणत्याही समांतर श्रेढीच्या पहिल्या आणि शेवटच्या पदांचा योग तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांच्या योगासमान असतो हे दाखवा.

(११) एका समांतर श्रेढीचे स वे पद $(\frac{5}{6} - \frac{1}{6})$ आहे तर तिच्या १२व्या पदांचा योग काढा.

(१२) एका समांतर श्रेढीचे त वे पद $\frac{3}{4}$ (त + ५) आहे तर १६ पदांचा योग काढा.

(१३) ५ + ७ + ९ + ह्या श्रेढीच्या किती पदांचा योग ४८० होईल ?

(१४) ३ पासून आरंभ करून, किती विषम संख्या घेतल्या म्हणजे त्यांचा योग २८८ होईल ?

(१५) ५, ८, ११..... या समांतर श्रेढीच्या पदांचा योग १०२५ आहे तर पदांची एकंदर संख्या काढा.

(१६) एका समांतर श्रेढीचे पहिले पद ७२ आणि प्रचय ५ आहे तर तिचा योग १४६३ येण्याकरिता किती पदे घ्यावी लागतील ?

(१७) एक समांतर श्रेढीचे आद्यपद ४ आणि अंत्य पद १०९ आहे. तिच्या स पदांचा योग २०३४ असल्यास स

ची अर्ही काढा.

- (१८) एक मनुष्य आपल्या मित्राला १००० रुपये उधार देतो, परंतु त्यावर व्याज न आकारतां प्रत्येक महिन्यास उत्तरोत्तर २ रु० ने कमी होणारी रकम घेतो. पहिला हप्ता ६४ रुपयांचा असेल तर उधारीची फेड किती माहिन्यांत होईल ?
- (१९). एका सरळ रस्त्यावर पांच पांच यष्टि अंतरावर एक असे १०० दगड आहेत. पहिल्या दगडामागे पांच यष्टि अंतरावर एक कंडा ठेवली असून तेथून एक मुलगा पळण्यास प्रारंभ करतो. व प्रत्येक वेळी एक एक याप्रमाणे सर्व दगड त्या कंडांत आणून टाकतो तर तो एकदर किती यष्टि धावेल ?
- (२०) ४, १२, २०, २८..... या श्रेढीच्या स पदांचा योग एखाद्या सम संख्येचा वर्ग आहे हें दाखवा.
- (२१) एखाद्या समान्तर श्रेढीच्या (स+१) व्या पदापासून (२स) व्या पदापर्यंतच्या पदांचा योग त्याच्या ३९ पदांच्या योगाच्या $\frac{1}{3}$ आहे, हें सिद्ध करा.
- (२२) १, ३, ५, ७..... या श्रेढीतील पदांची संख्या सम असल्यास पूर्वार्ध पदांच्या योगाची, उत्तरार्ध पदांच्या योगाशी निष्पत्ति स्थिर असते हें दाखवा.
- (२३) जर एखाद्या समान्तर श्रेढीत

$$योम = \frac{1}{2} योम + स = \frac{1}{2} यो म + त ;$$

तर $s \times t = m$ ($m + s + t$) आहे हे सिद्ध करा.

[मद्रास १९००]

(२४) दोन समांतर श्रेढींच्या s व्या पदांच्या योगांची निष्पत्ति $\frac{3s+1}{8s-6}$ असेल तर त्यांच्या १५ व्या पदांची निष्पत्ति काढा.

(२५) दोन समांतर श्रेढींच्या s पदांच्या योगाची निष्पत्ति $(3s+31) : (5s-3)$ आहे तर त्यांची ९ वीं पदे समान आहेत हे दाखवा.

(२६) प्राकृतिक संख्यांचे खालील प्रकारे समूह तयार केले—
१, (२+३), (४+५+६), (७+८+९+१०),
तर s व्या समूहांतील पदांचा योग $\frac{1}{2}s(s^2+1)$ आहे हे दाखवा.

[कलकत्ता]

(२७) विषम संख्येचे खालील प्रकारे समूह पाडले—
(१+३), (५+७+९+११), (१३+१५+१७+१९+
२१+२३),

तर s व्या समूहांतील पदांचा योग $8s^2$ आहे हे सिद्ध करा.

यावरून, पहिल्या s प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग त्यांच्या योगाच्या वर्गासमान असतो हे सिद्ध करा.

(२८) एका श्रेढीच्या s पदांचा योग $ks + x$ असून त्यांत k आणि x अचल आहेत तर ती समांतर श्रेढी

आहे हें दाखवा. [नागपूर १९३१]

(२९) एका समांतर श्रेढीच्या स पदांचा योग कस^२ आहे तर ती श्रेढी काढा.

(३०) एका समांतर श्रेढीचें त वें पद क आणि थ वें पद ख आहे तर (त+थ) पदांचा योग

$$\frac{त+थ}{२} [क+ख+\frac{क-ख}{त-थ}] \text{ आहे हें दाखवा.}$$

(३१) एका समांतर श्रेढीच्या त पदांचा योग थ आणि घ पदांचा योग त आहे तर तिच्या (त+थ) पदांचा योग काढा.

(३२) एका समांतर श्रेढीच्या त आणि थ पदांचा योग समान आहे तर (त+थ) पदांचा योग शून्य आहे हें दाखवा.

(३३) एका समांतर श्रेढीचें त वें, थ वें आणि द वें पद क्रमशः ट, ठ आणि ड आहे तर

$$ट(थ-द)+ठ(द-त)+ड(त-थ)=० \text{ हें दाखवा.}$$

(३४) एका समांतर श्रेढीच्या त, थ, आणि द पदांचा योग क्रमशः ट, ठ आणि ड आहे तर

$$ट\frac{थ-ड}{त}+ठ\frac{द-ड}{थ}+ड\frac{त-द}{द}=० \text{ हें दाखवा.}$$

(३५) $\frac{१}{ख+ग}$, $\frac{१}{ग+क}$ आणि $\frac{१}{क+ख}$ या तीन राशी

समांतर श्रेढीत असतील तर क^२, ख^२ आणि ग^२ याहि तीन राशी समांतर श्रेढीत आहेत हें दाखवा.

(३६) जर $(ख-ग)^2$, $(ग-फ)^2$, $(क-ख)^2$, या तीन राशी
समांतर श्रेणीत असतील तर

$\frac{१}{ख-ग}$, $\frac{१}{ग-फ}$ आणि $\frac{१}{फ-ख}$ याही समांतर
श्रेणीत आहेत हे दाखवा.

(३७) जर $क^१ = ख^१ = ग^१$ आणि $ख^२ = फग$ तर
सिद्ध करा की $य$, २ आणि $ल$ समांतर श्रेणीत आहेत.

प्रकरण पांचवें

गुणोत्तर श्रेढी

(geometrical progression)

५.१ ज्या श्रेढीतील कोणत्याही पदाची त्याच्या पूर्वगामी पदाशी असलेली निष्पत्ति सदा तीच असते तिला गुणोत्तर श्रेढी म्हणतात, आणि या निष्पत्तीला साधारण निष्पत्ति (common ratio) म्हणतात.

१, २, ४, ८, १६, ३२,.....;

$\frac{1}{३}, \frac{1}{९}, \frac{1}{२७}, \frac{1}{८१}, \dots$;

आणि k, kn, kn^2, kn^3, \dots हीं गुणोत्तर श्रेढीचीं उदाहरणें आहेत.

या श्रेढीतील कोणत्याही दोन लागोपाठच्या पदांची निष्पत्ति क्रमशः $२, \frac{1}{३}$, आणि n आहे. म्हणून त्यांना गुणोत्तर श्रेढी म्हटलें आहे.

साधारण निष्पत्ति— साधारण निष्पत्तीचा दुसरीहि परिभाषा देतां येते ती अशी— गुणोत्तर श्रेढीतील पदांच्या अर्हा ज्या साधारण अवयवाने वाढतात किंवा कमी होतात त्या अवयवास साधारण निष्पात्त म्हणतात. ही निष्पत्ति कोणत्याहि पदाला त्याच्या पूर्वगामी पदाने भागून काढतां येते.

५.१२ गुणोत्तर श्रेढीचें कोणतेंहि पद काढणें

गुणोत्तर श्रेढीचें आद्य पद 'क' आणि साधारण निष्पत्ति 'न' आहे असे समजा.

आद्य पदाला न नें गुणून दुसरें पद प्राप्त होतें.

यावरून १लें पद क;

म्हणून दुसरें पद कन

तिसरें पद कन^२

चवथें पद कन^३

तेरावें पद कन^{१२}

आणि त वें पद कन^{त-१}

जर तव्या पदाचें प_त न अभिधान केलें तर

प_त = कन^{त-१}

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की गुणोत्तर श्रेढीच्या कोणत्याहि पदांतील न चा घात त्या पदाच्या क्रमांकापेक्षा एक ने कमी असतो.

५.१३ गुणोत्तर श्रेढीची कोणतीहि दोन पदे माहीत असल्यास संपूर्ण श्रेढी पूर्णपणें निश्चित होते.

समजा, त वै आणि घ वै पद अ आणि आ ही आहेत,
आणि आद्य पद क असून साधारण निष्पत्ति न मांड.

आता, $P_t = कन^{त-१}$ परंतु $P_t = अ$

म्हणून $कन^{त-१} = अ.....(१)$

त्याचप्रमाणे

$P_y = कन^{य-१}$

परंतु $P_y = आ$

∴ म्हणून $कन^{य-१} = आ.....(२)$

(१) ला (२) ने भागून

$\frac{कन^{त-१}}{कन^{य-१}} = \frac{अ}{आ}$

म्हणून $न^{त-य} = \frac{अ}{आ}$

म्हणून $न = \left[\frac{अ}{आ} \right]^{\frac{१}{त-य}}.....(३)$

(१) मध्ये न च्या अर्हत्वा आदेश करून

क $\left[\frac{अ}{आ} \right]^{\frac{त-१}{त-य}} = अ$

म्हणून क = अ $\left[\frac{आ}{अ} \right]^{\frac{त-१}{त-य}}.....(४)$

(३) आणि (४) करून आद्य पद 'क' आणि साधारण निष्पत्ति
'न' ही काढता येत असल्यामुळे संपूर्ण श्रंढो निश्चित होत.

उदाहरण—

ज्या गुणोत्तर थेदीत ४थें आणि ७वें हीं पदें क्रमशः ४० आणि ३२० आहेत तिचें १लें आणि ५वें पद काढा.

थेदीचें आद्य पद क आणि साधारण निष्पत्ति न आहे असें समजा.

$$\text{तेव्हा } P_4 = \text{कन}^3 = ४० \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{आणि } P_5 = \text{कन}^4 = ३२० \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{म्हणून } \frac{P_5}{P_4} = \frac{\text{कन}^4}{\text{कन}^3} = \frac{३२०}{४०}$$

$$\text{किंवा } \text{न}^3 = २^3$$

$$\text{किंवा } \text{न} = २$$

$$\text{पुन्हा } P_4 = \text{कन}^3 \\ = ४०$$

$$\text{पण } \text{न} = २$$

$$\text{म्हणून } ८ \text{ क} = ४०$$

$$\text{किंवा } \text{क} = ५$$

$$\text{आता } P_4 = \text{कन}^4 = ५ \times २^4 \\ = ८०$$

५.२ गुणोत्तर मध्यक—

(१) कोणत्याहि दोन राशींमधील गुणोत्तर मध्यकची परिभाषा.

जर क, म आणि ख या तीन राशी गुणोत्तर

श्रेढीत असतील तर म ला क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यक म्हणतात.

अथवा

क आणि ख या दोन राशींच्या मध्ये म चा निवेश करून जर क, म, ख ही गुणोत्तर श्रेढी होत असेल तर 'म' ला क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यक म्हणतात.

आता, क, म, ख ही गुणोत्तर श्रेढी आहे.

$$\text{म्हणून } \frac{\text{क}}{\text{म}} = \frac{\text{म}}{\text{ख}}$$

$$\text{किंवा } \text{म}^2 = \text{कख}$$

$$\text{किंवा } \text{म} = \pm \sqrt{\text{कख}}$$

यावरून, कोणत्याही दोन राशींमधील गुणोत्तर मध्यक त्यांच्या गुणाकाराच्या वर्गमूलाएवढे असते.

(२) गुणोत्तर मध्यकें

कोणत्याही दोन राशींमधील अनेक गुणोत्तर मध्यकांची परिमाप

क आणि ख या कोणत्याही दोन राशींच्या मध्ये $\text{म}_1, \text{म}_2, \text{म}_3, \dots, \text{म}_n$ या राशींचा निवेश करून जर क, $\text{म}_1, \text{म}_2, \text{म}_3, \dots, \text{म}_n$, ख ही गुणोत्तर श्रेढी होत असेल तर $\text{म}_1, \text{म}_2, \text{म}_3, \dots, \text{म}_n$ यांना क आणि ख यांमधील गुणोत्तर मध्यकें म्हणतात.

५.२१ दिलेल्या दोन राशींच्या मध्ये दिलेल्या संख्ये

इतक्या मध्यकांचा निवेश करणे.

क आणि ख या दोन दिलेल्या राशी असून त्यांच्यामध्ये त मध्यकांचा निवेश करावयाचा आहे.

समजा m_1, m_2, \dots, m_t ही त मध्यकें आणि न ही साधारण निष्पत्ति आहे. तर क, m_1, m_2, \dots, m_t , ख ही $(t+2)$ पदांची गुणोत्तर श्रेढी तयार होते.

ख हे $(t+2)$ वे पद आहे

$$\text{म्हणून } ख = क \times n^{t+1}$$

$$\text{किंवा } n^{t+1} = \frac{ख}{क}$$

$$\therefore n = \left[\frac{ख}{क} \right]^{\frac{1}{t+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } m_1 &= \text{दुसरें पद} \\ &= क \times n \end{aligned}$$

$$= क \left[\frac{ख}{क} \right]^{\frac{1}{t+1}}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \text{तिसरें पद} \\ &= क n^2 \end{aligned}$$

$$= क \left[\frac{ख}{क} \right]^{\frac{2}{t+1}}$$

.....

$$\text{ह्याप्रमाणे } m_t = (t+1) \text{ वे पद}$$

$$= k \times n^t$$

$$= k \left[\frac{x}{k} \right]^{\frac{t}{t+1}}$$

म्हणून m_1, m_2, \dots, m_t हीं मध्यकें

क्रमशः $k \left(\frac{x}{k} \right)^{\frac{1}{t+1}}, k \left(\frac{x}{k} \right)^{\frac{2}{t+1}}, \dots, k \left(\frac{x}{k} \right)^{\frac{t}{t+1}}$

आहेत.

उदाहरण— ३ आणि $\frac{3}{256}$ यांच्यामध्ये ७ गुणोत्तर

मध्यकांचा नियेश करा.

समजा की m_1, m_2, \dots, m_7 हीं मध्यकें असून न ही साधारण निष्पत्ति आहे.

आता, श्रेढीत एकंदर ९ पर्वें असून $\frac{3}{256}$ हे ९ वें पद

आणि ३ हे पहिलें पद आहे.

$$\text{म्हणून } \frac{3}{256} = 3 \times n^c$$

$$\text{किंवा } n^c = \frac{1}{256}$$

$$= \frac{1}{2^8}$$

$$\text{म्हणून } n = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{यावरून } n = +\frac{1}{2} \text{ घेतल्यास}$$

$$m_1 = \text{दुसरे पद}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \text{तिसरे पद}$$

$$= 3 \left[\frac{1}{2} \right]^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

.....

$$m_n = n^{\text{थे पद}}$$

$$= 3 \left[\frac{1}{2} \right]^n$$

$$= \frac{3}{2^n}$$

तेव्हा $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{2^n}$ ही ७ मध्यमे आहेत.

आता $n = -\frac{1}{2}$ घेतल्यास

$-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, -\frac{3}{2}$ हीं ७ मध्यकें आहेत.

५.३ क हे पहिले पद, आणि न ही साधारण निष्पत्ति असलेल्या गुणोत्तर श्रेढीच्या स पदांचा योग काढणे.

क, कन, कन^२, ... कन^{स-१} दिलेली गुणोत्तर श्रेढी आहे असे समजा. तिच्या इष्ट योगाचे यो ने अभिधान केल्यास

$$यो = क + कन + कन^2 + \dots + कन^{स-1} \dots \dots \dots (१)$$

दोन्ही पक्षांना 'न' या साधारण निष्पत्तीने गुणून

$$यो \times न = कन + कन^2 + \dots + कन^{स-1} + कन^स \dots (२)$$

(१) मधून (२) उणे करून

$$यो (१ - न) = क (१ - न^स)$$

$$\text{म्हणून यो} = \frac{क (१ - न^स)}{१ - न} \dots \dots \dots (३)$$

उदाहरण १— $\sqrt{3}, १, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \dots$ या श्रेढीच्या १८

पदांचा योग काढा.

दिलेल्या श्रेढीतील पहिले पद $\sqrt{3}$, निष्पत्ति $\frac{1}{3}$ आणि पदसंख्या १८ आहे.

(५.३) मधील (इ) संबंधांत क, न आणि स यांच्या अर्हांचा आदेश करून

$$\text{यो} = \frac{\sqrt{3} [1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^{10}]}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3 (1 - \frac{1}{3^5})}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(3^5 - 1)}{3^5 (\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{2463 - 1}{3^5 (\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{2462}{243 (\sqrt{3} - 1)}$$

हसला परिमेय करून

$$\text{यो} = \frac{2462}{243 (\sqrt{3} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{2461 (\sqrt{3} + 1)}{243}$$

उदाहरण २— १, २, ४, या श्रेढीच्या पदांचा योग २५५.
असल्यास त्यांची संख्या काढा.

समजा पदसंख्या n आहे.

$$\text{माधारण निष्पत्ति} \frac{n}{2} = 2$$

पहिलें पद १ आणि योग २५५ आहे. म्हणून (५.३)
मधील (इ) संबंधावरून

$$२५५ = \frac{२४ - १}{२ - १}$$

$$\text{म्हणून } १ - २४ = -२५५$$

$$\text{किंवा } २४ = २५६$$

$$= २८$$

$$\text{म्हणून } ४ = ८$$

यावरून इष्ट पदसंख्या ८ आहे.

प्रश्नसंग्रह ५

(१) काढा—

(१) १, -२, ४, -८, या श्रेढीचें १० वें पद

(२) ३०, १५, ७.५, या श्रेढीचें ७ वें पद

(३) $\frac{१}{५}, -\frac{२}{१५}, \frac{४}{४५}, \dots$ या श्रेढीचें ८ वें पद

(४) $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{४}{३}, \dots$ या श्रेढीचें ८ वें पद

(२) खालील श्रेढींचे योग काढा.

(१) $२ + ४ + ८ + \dots + १००$ पदापर्यंत

$$(२) १ - \frac{२}{३} + \frac{४}{९} + \dots \dots ६ \text{ पदापर्यंत}$$

$$(३) २ + \sqrt{२} + १ + \frac{१}{\sqrt{२}} + \dots \dots १२ \text{ पदापर्यंत}$$

$$(४) \frac{२}{३} - \frac{१}{२} + \frac{३}{४} - \dots \dots \text{ स पदापर्यंत}$$

$$(५) \frac{x}{y} \frac{\sqrt{५}}{\sqrt{३}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{५}} + \dots \dots \text{ स पदापर्यंत}$$

$$(६) x^2 + x^2 + ४ + x^2 + १४ + \dots \dots \text{ स पदापर्यंत}$$

(३) एका गुणोत्तर श्रेढीतील तीन अनुगामी पदांचा गुणाकार २१६ आणि त्यांतील प्रत्येकीं दोन पदे घेऊन घेणाऱ्या गुणाकारांचा योग १२६ आहे तर ती पदे काढा.

(४) एका गुणोत्तर श्रेढीतील तीन अनुगामी पदांचा योग २४६ असून त्यांचा गुणाकार ६४ आहे. तर ती पदे काढा.

(५) एखाद्या गुणोत्तर श्रेढीत ६ पदे असल्यास आद्य आणि अंत्य पदांचा गुणाकार, दुसऱ्या आणि चवथ्या पदांच्या गुणाकारा समान असतो हे दाखवा.

(६) एका श्रेढीच्या स पदांचा योग y , गुणाकार r आणि पदांच्या व्युत्क्रमांचा (reciprocals) योग l असेल

$$\text{तर } r^2 = \left(\frac{y}{l}\right) \text{ आहे हे दाखवा.}$$

[नागपुर

(७) एका गुणोत्तर श्रेढीचे k हे आद्य पद, n हे स वे पद

आणि पहिल्या स पदांचा गुणाकार ग असल्यास

$$g = (k \times n)^{\frac{m}{2}}$$

[कलकत्ता १९१८

- (८) एका गुणोत्तर श्रेढीच्या स पदांचा योग ७२८, साधारण निष्पत्ति ३ आणि आद्य पद २ आहे तर स ची अर्हा काढा.
- (९) एका गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति ३ असून पहिल्या व तिसऱ्या पदांचा योग पहिल्या आणि दुसऱ्या पदांच्या वर्गाच्या योगासमान आहे. तर तिच्या स पदांचा योग काढा. जर $s=6$ असेल तर योग ३६४ आहे हे दाखवा.
- (१०) खालील राशींमध्ये निर्देशिलेल्या गुणोत्तर मध्यकांचा निवड करा.
- (१) $\frac{1}{27}$ आणि ९ यांमध्ये ४ मध्यक
- (२) २ आणि ४८६ यांमध्ये ४ मध्यक
- (३) $\frac{32}{81}$ आणि $\frac{9}{2}$ यांमध्ये ५ मध्यक
- (४) २७ आणि $\frac{1}{27}$ मध्ये ५ मध्यक
- (११) जिवे १० वे पद १ आणि पहिले पद २ आहे अशा गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति काढा.
- (१२) दोन संख्यांचा योग त्यांमधील गुणोत्तर मध्यकापेक्षा

९ ने अधिक असून त्यांच्या योगाचा वर्ग त्यांच्या गुणाकारापेक्षा १८९ ने अधिक आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

- (१३) क आणि ख यांच्या मध्ये स गुणोत्तर मध्यकांचा निवेश केल्यास, त्या मध्यकांचा गुणाकार (कख)^३ असतो हे दाखवा.
- (१४) एका गुणोत्तर श्रेढीतील पदांची संख्या सम आहे तर आद्य आणि अंत्य पदांपासून समान अंतरावर असणाऱ्या पदांचा गुणाकार मध्यल्या दोन पदांच्या गुणाकारासमान असतो हे दाखवा.
- (१५) एका गुणोत्तर श्रेढीतील पहिल्या स, २स आणि ३ स पदांचा योग क्रमशः $यो_१$, $यो_२$ आणि $यो_३$ असल्यास $यो_१$, $(यो_२ - यो_३) = (यो_२ - यो_१)^२$ आहे हे सिद्ध करा.
- (१६) जर $यो_१, यो_२, \dots, यो_n$ एखाद्या गुणोत्तर श्रेढीतील क्रमशः १, २, ३, ... स पदांच्या योगांचे अभिधान करीत असतील तर $(यो_१ + यो_२ + यो_३ + \dots + यो_n)$ ची अर्धा काढा.
- (१७) जर $क : ख = २ + \sqrt{३} : २ - \sqrt{३}$ असेल, तर क आणि ख यांमधील समांतर मध्यक त्यांच्या गुणोत्तर मध्यकाच्या दुप्पट असते हे दाखवा.
- (१८) क आणि ख यांच्यांमधील समांतर मध्यक आणि गुणोत्तर मध्यक यांची निष्पत्ति मः न आहे. तर

$$\frac{\text{क} = \frac{म + \sqrt{म^2 - न^2}}{म - \sqrt{म^2 - न^2}} \text{ बाहे हें दाखवा.}$$

- (१९) जर क + ख + ग, $\sqrt{क^2 + ख^2 + ग^2}$ आणि क - ख + ग या तीन राशी गुणोत्तर श्रेढीत असतील तर क, ख, ग सुद्धा गुणोत्तर श्रेढीत असतात हें दाखवा.
- (२०) जर क, ख, ग आणि घ गुणोत्तर श्रेढीत असतील तर $क^2 + ख^2$, $ख^2 + ग^2$, $ग^2 + घ^2$ या राशीहि गुणोत्तर श्रेढीत असतात हें दाखवा.

[कलकत्ता १९१९]

- (२१) जर क, ख, ग समांतर श्रेढीत आणि य, र, ल गुणोत्तर श्रेढीत असतील तर
 $यल-ग \times रग-क \times लक-स = १$ हें दाखवा.

- (२२) क, ख, ग गुणोत्तर श्रेढीत असून य आणि र ही क्रमशः क, ख आणि ख, ग यांमधील समांतर मध्यकें असल्यास

$$\frac{\text{क}}{\text{य}} + \frac{\text{ख}}{\text{र}} = २ \text{ आणि } \frac{१}{\text{य}} + \frac{२}{\text{र}} = \frac{३}{\text{ख}} \text{ हें दाखवा.}$$

- (२३) एका गुणोत्तर श्रेढीचें (त + थ) वें पद = म असून (त - थ) वें पद = न आहे तर त वें आणि थ वें पद काढा.
- (२४) एका समांतर श्रेढीचें आद्य पद एका गुणोत्तर श्रेढीतील आद्यपदासमान असून पहिलीचा प्रचय आणि दुसरीची साधारण निष्पत्ति दोन्हीहि २ च्या समान आहेत. प्रत्येक श्रेढीतील ५ पदांचा योगहि समान असल्यास प्रत्येकीचें ५ वें पद काढा.

५.४ समांतर गुणोत्तर श्रेढी (arithmetico-geometric series)— $k, (k+x)n, (k+2x)n^2, (k+3x)n^3, \dots$ या श्रेढीचे निरीक्षण करा.

तिच्या प्रत्येक पदांत दोन अवयव आहेत, आणि

१ लें पद k आणि १ यांचा गुणाकार आहे.

२ रें पद $(k+x)$ आणि n यांचा गुणाकार आहे.

३ रें पद $(k+2x)$ आणि n^2 यांचा गुणाकार आहे.

४ रें पद $(k+3x)$ आणि n^3 यांचा गुणाकार आहे.

यावरून असे दिसून येते की या श्रेढीतील पदे अंशतः समांतर श्रेढीच्या आणि अंशतः गुणोत्तर श्रेढीच्या नियमानुसार निर्माण झाली आहेत.

$k, k+x, k+2x, \dots$ ही समांतर श्रेढी असून

$1, n, n^2, \dots$ ही गुणोत्तर श्रेढी आहे. अशा प्रकारच्या श्रेढीस समांतर गुणोत्तर श्रेढी म्हणतात.

५.४१ समांतर गुणोत्तर श्रेढीच्या s पदांचा योग—
 $k, (k+x)n, (k+2x)n^2, \dots$ ह्या श्रेढीत s पदे आहेत असे समजा.

तिच्या s पदांच्या योगाचे यों ने अभिधान केल्यास

$$S = k + (k+x)n + (k+2x)n^2 + \dots + [k + (s-1)x]n^{s-1} \dots \dots \dots (अ)$$

(अ) च्या दोन्ही बाजूस गुणोत्तर श्रेढीच्या n या साधारण निष्पत्तीने गुणून

$$\text{यो} \times \text{न} = \text{कन} + (\text{क} + \text{ख})\text{न}^2 + (\text{क} + 2\text{ख})\text{न}^3 + \dots + [\text{क} + (\text{स} - 1)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \dots \dots \dots (\text{आ})$$

आता, (अ) आणि (आ) मधील न, न^२, न^३, युक्त पदे एकाखाली एक येतील अशा प्रकारे (अ) आणि (आ) संबंध पुन्हा लिहा.

$$\text{यो} = \text{क} + (\text{क} + \text{ख})\text{न} + (\text{क} + 2\text{ख})\text{न}^2 + \dots + [\text{क} + (\text{स} - 1)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}-1} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{यो} \times \text{न} = \text{कन} + (\text{क} + \text{ख})\text{न}^2 + \dots + [\text{क} + (\text{स} - 1)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \dots \dots \dots (२)$$

आता (१) मधून (२) उणे करा.

$$\begin{aligned} \text{यो} (१ - \text{न}) &= \text{क} + \text{खन} + \text{खन}^2 + \dots + \text{खन}^{\text{स}-1} \\ &\quad - [\text{क} + (\text{स} - 1)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \\ &= \text{क} + \text{खन}[१ + \text{न} + \text{न}^2 + \dots + \text{न}^{\text{स}-1}] \\ &\quad - [\text{क} + (\text{स} - 1)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}} \end{aligned}$$

उजव्या पक्षांत पहिल्या कंसांत (स - १) पदांची गुणोत्तर श्रेढी आहे. म्हणून

$$\text{यो} (१ - \text{न}) = \text{क} + \frac{\text{खन}[१ - \text{न}^{\text{स}-1}]}{१ - \text{न}} - [\text{क} + \text{स} - १\text{ख}]\text{न}^{\text{स}}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून यो} &= \frac{\text{क}}{१ - \text{न}} + \frac{\text{खन}[१ - \text{न}^{\text{स}-1}]}{(१ - \text{न})^2} \\ &\quad - \frac{[\text{क} + (\text{स} - १)\text{ख}]\text{न}^{\text{स}}}{१ - \text{न}} \end{aligned}$$

= दिलेल्या समांतर गुणोत्तर श्रेढीचा श्रृंखलायोग.

उदाहरण — $१ + ४य + ७य^२ + १०य^३ + \dots$ या श्रेढीच्या
स पदांचा योग काढा.

स पदांचा योगाचें यो ने अभिधान केल्यास

$$\begin{aligned} \text{यो} &= १ + ४य + ७य^२ + १०य^३ + \dots \\ &+ [१ + ३(स-२)] य^{स-२} \\ &+ [१ + ३(स-१)] य^{स-१} \dots \dots (अ) \end{aligned}$$

दोन्ही पक्षास य ने गुणून

$$\text{यो} \times य = य + ४य^२ + ७य^३ + १०य^४ + \dots$$

$$+ [१ + ३(स-२)] य^{स-१} + [१ + ३(स-१)] य^{\text{स}} \dots (आ)$$

अ मधून (आ) उणें करून

$$\begin{aligned} \text{यो} (१-य) &= १ + ३य + ३य^२ + \dots + ३य^{स-१} \\ &\quad - [१ + ३(स-१)] य^{\text{स}} \\ &= १ + ३य [१ + य + य^२ + \dots + य^{स-२}] \\ &\quad - (३स-२) य^{\text{स}} \end{aligned}$$

$$= १ + ३य \frac{१-य^{स-१}}{१-य} - (३स-२) य^{\text{स}}$$

$$\therefore \text{यो} = \frac{१}{१-य} + \frac{३य[१-य^{स-१}]}{(१-य)^२} - \frac{(३स-२)य^{\text{स}}}{१-य}$$

= स पदांचा योग.

५.५ अनंत श्रेढी (infinite series) — ज्या श्रेढी-
तील पदांची संख्या सामित (limited) आहे अशा श्रेढीला
सांत श्रेढी (finite series) म्हणतात. उलट ज्या श्रेढीतील

पदांच्या संख्येला अंत नाही तिला अनंत श्रेढी म्हणतात.
 क, कन, कन^२, कन^म, कन^{म+१}, ही अनंत गुणो-
 च्चर श्रेढी आहे.

५.५१ अनंत गुणोच्चर श्रेढीचा योग—समजा
 क, कन, कन^२, कन^३, ही अनंत श्रेढी आहे हिच्या स
 पदांचा योग काढून स ला अनंतीप्रवृत्त करा आणि येणाऱ्या
 फलाचें निरीक्षण करा.

हिच्या पहिल्या स पदांच्या योगाचें यो_स ने अभिधान
 करून

$$\text{यो}_s = क \frac{(१ - न^s)}{१ - न} = \frac{क}{१ - न} - \frac{कन^s}{१ - न}$$

याता स सीमातीत असंख्य घेण्यास

$$s \rightarrow \infty \text{ यो}_s = s \rightarrow \infty \frac{क}{१ - न} - s \rightarrow \infty \frac{कन^s}{१ - न}$$

स सीमातीत असंख्य घेण्यास $\frac{क}{१ - न}$ हें पद स विर-

हित असल्यामुळे त्याची अशी सदैव $\frac{क}{१ - न}$ राहते परंतु

$\frac{क}{१ - न} न^s$ या पदांत स हा अंशातील न चा घात आहे तेव्हा

न, संख्येने (numerically) १ पेक्षा अधिक असेल तर जसा

जसा स अनंतीप्रवृत्त होतो तसे तसे $\frac{क}{१ - न} न^s$ हें पदहि

अनंतीप्रवृत्त होंतें. शेषटी स सीमातीत असंख्य केल्यास

$$\frac{फ}{१-न} न^४ = \infty$$

म्हणून $\lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{स} योस = \frac{फ}{१-न} - \lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{१-न}$

म्हणून $\lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{स} योस = \text{परिमित राशि} - \text{अनंत राशि}$
 $= \text{अनंत राशि.}$

यावरून ज्या अनंत गुणोत्तर श्रेढीची निष्पत्ति संख्येने, १ पेक्षा अधिक असते त्या श्रेढीचा योग अनंत असतो.

आता, न संख्येने पेक्षा लहान असलेला तर जसा जसा स अनंतीप्रवृत्त होतो तसे तसे $\lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{१-न} न^४$

हें पद शून्यप्रवृत्त होंतें. शेषटी स सीमातीत असंख्य

केल्यास $\frac{फ}{१-न} न^४ = ०$

म्हणून

$\lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{स} योस = \frac{फ}{१-न} - \lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{१-न}$

म्हणून $\lim_{स \rightarrow \infty} \frac{सी}{स} योस = \frac{फ}{१-न} - ०$

$= \frac{फ}{१-न}$

५

$= \text{परिमित राशि}$

यावरून ज्या अनंत गुणोत्तर श्रेढीची निष्पत्ति संख्येने १ पेक्षा लहान असते त्या श्रेढीचा योग परिमित असतो.

म्हणून k, kn^2, kn^3, \dots या अनंत गुणोत्तर श्रेढीचा योग, n संख्येने १ पेक्षा लहान असल्यास, $\frac{k}{1-n}$ असतो.

उदाहरण— $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ या अनंत गुणोत्तर श्रेढीचा योग काढा.

दिलेल्या श्रेढीचे आय पद १ आणि साधारण निष्पत्ति $\frac{1}{2}$ आहे तिच्या पहिल्या s पदांचा योग

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{[1 - (\frac{1}{2})^s]}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^s}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^{s-1}} \end{aligned}$$

आता s असंख्य केल्यास

$$\text{सी } s \rightarrow \infty \text{ योग} = \frac{2}{2} - \text{सी } \frac{1}{2 \times 2^{s-1}}$$

$$\text{पण } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} = 0$$

$$\text{म्हणून } y_0 = \frac{3}{2}$$

५.६ अनंत समांतर गुणोत्तर श्रेढीचा योग—

क, (क+ख)न, (क+२ख)न^२,..... या अनंत श्रेढीच्या पहिल्या स पदांचा योग ५.४१ व्या अनुच्छेदांत काढला आहे.

त्यामध्ये

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{\text{क}}{1-n} + \frac{\text{ख} \cdot n}{(1-n)^2} - \frac{\text{ख} \cdot n^2}{(1-n)^3} \\ &\quad - \frac{[\text{क} + (n-1) \text{ख}]}{1-n} \cdot n^3 \end{aligned}$$

आता स सीमातीत असंख्य केल्यास जर न, संख्येने, १ पेक्षा अधिक असेल तर शेवटची दोन पदे अनंत होतात, आणि

$$y_0 = \infty$$

परंतु न संख्येने, १ पेक्षा लहान असेल तर शेवटची दोन पदे, प्रत्येकी, पहिल्या दोन पदांशी तुलना केली तर उपेक्षणीय होतात आणि शेवटी त्यांचा लोप हातो.

$$\text{म्हणून } y_0 = \frac{\text{क}}{1-n} + \frac{\text{ख} \cdot n}{(1-n)^2}$$

उदाहरण— $\frac{2}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{6}{9^3} + \frac{8}{9^4} + \dots$ या अनंत

श्रेढीचा योग काढा. योगाचें यो ∞ ने अभिधान केल्यास

$$\text{यो}\infty = \frac{2}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{6}{9^3} + \frac{8}{9^4} + \dots\infty \quad (1)$$

दोन्ही पक्षास $\frac{1}{9}$ ने गुणून

$$\frac{\text{यो}\infty}{9} = \frac{2}{9^2} + \frac{4}{9^3} + \frac{6}{9^4} + \dots\infty \quad (2)$$

(१) मधून (२) उणें करून

$$\frac{8}{9}\text{यो}\infty = \frac{2}{9} + \frac{2}{9^2} + \frac{2}{9^3} + \dots\infty$$

$$\text{किंवा } \frac{8}{9}\text{यो}\infty = \frac{2}{9} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right]$$

$$\text{म्हणून यो}\infty = \frac{9}{18}$$

५.७ आवर्त-दशमिक (recurring decimals)—
आवर्त-दशमिक हें अनंत गुणोत्तर श्रेढीचें सर्वातम उदाहरण आहे. आवर्त-दशमिकांमध्ये आवर्त अंक १, २, ३,....जमैं असतील तदनुसार अनंत गुणोत्तर श्रेढीची साधारण निष्पत्ति

$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \dots\dots$ असते.

आवर्तिका संवादी (corresponding) मित्राचें प्रति-
निधान अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या योगाने होतें.

आता $\frac{2}{3}$ हा अपूर्णाक दशमिक पद्धतीत $.6666\dots$

च्या समान आहं आणि $.6666\dots$ या संख्येचें, संक्षिप्त
रूपांत '६' ने अभिधान केलें जातें, हें विद्यार्थ्यांना माहीतच
आहं.

आता, $\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots\dots$ या

अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या पहिल्या स पदांच्या योगाचें
योग न अभिधान करून

$$\text{योग} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \times 10^s}$$

आता स सीमातीत असंख्य घेत्यास

$$\text{सी } s \rightarrow \infty \quad \text{योग} = \frac{2}{3} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{3 \times 10^s}$$

$$\text{पण सी } s \rightarrow \infty \quad \frac{2}{3 \times 10^s} = 0$$

$$\therefore \text{अखेरचा योग } s \rightarrow \infty = \frac{2}{3}$$

यावरून हें स्पष्ट आहे की कोणत्याहि आवर्ताचा संवादी
भिन्न हा त्याच्या संवादी अनंत गुणोत्तर थढोच्या योगाएवढा
असतो.

મહાત્મા .૬૬૬૬... ને કિંવા .૬ અભિધાન હાલેલા ૩ હા

अपूर्णांक अन्यपद्धतीने $\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots \infty$

या अनंत गुणोत्तर श्रेढीच्या रूपांत लिहितात.

उदाहरण— १२३ या आवत दशमिषावा संवादी भिन्न
फाढा.

$\therefore \frac{1}{x} = .\overline{123}\dots\dots$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{1000000} + \frac{23}{100000000} + \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{23}{20^3} \left[1 + \frac{2}{20^2} + \frac{2}{20^4} + \dots \right]$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{22}{10^3} \times \frac{2}{2 - \frac{2}{10^2}}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{23}{10^3} \times \frac{10^3}{99}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{220}$$

$$= \frac{61}{824}$$

म्हणून .१२३ चा $\frac{61}{824}$ हा संवादी भिन्न आहे.

५.८ आवर्त-दशमिकाचा संवादी भिन्न काढण्याची सामान्य रीति—

समजा, द हा दिलेला आवर्त दशमिक आहे त्याचा त हा अनावर्त भाग प अंकी असून थ हा आवर्त भाग फ अंकी आहे.

तेव्हा द = तथथथ.....

दोन्ही बाजूस $10^{प+फ}$ ने आणि $10^प$ ने गुणा म्हणजे

$$10^{प+फ} \times द = तथ'थथथ (अ)$$

$$\text{आणि } 10^प \times द = त'थथथ (आ)$$

(अ) मधून आ उर्णे करून

$$10^प \times द (10^फ - 1) = तथ - त$$

$$\text{म्हणून } द = \frac{तथ - त}{10^प(10^फ - 1)}$$

म्हणून द या आवर्त-दशमिकाचा

$$\frac{तथ - त}{10^प(10^फ - 1)} \text{ हा संवादी भिन्न आहे.}$$

आता, $१०^{\text{फ}} - १$ ही राशि फ अंकी असून तिच्यातील प्रत्येक अंक ९ आहे. तिला $१०^{\text{प}}$ ने गुणिल्यास, $१०^{\text{प}}(१०^{\text{फ}} - १)$ ही राशि (प + फ) अंकी असून तिचे पहिले फ अंक प्रत्येकी ९ व नंतरचे प अंक प्रत्येकी शून्य आहेत.

या निरीक्षणावरून, कोणत्याहि आवर्त-दशमिकाचा संवादी भिन्न काढण्याकरिता खालील नियम देता येतो.

कोणत्याहि-आवर्त दशमिकाच्या संवादी भिन्नाचा अंश हा त्या आवर्त-दशमिकांत असणाऱ्या अनावर्त भागापुढे आवर्त भाग मांडून येणाऱ्या राशीतून अनावर्त भाग उणें करून येणारी राशि असतो, आणि छेद हा आवर्त भागांतील अंकाइतके ९ क्रमाने मांडून त्यापुढे अनावर्त भागांतील अंकाइतकी शून्य मांडून येणारा राशि असतो.

उदाहरण— वरील नियमाने १२३ चा संवादी भिन्न काढा.

$$\text{संवादी भिन्नाचा अंश} = १२३ - १ = १२२$$

यांत दोन आवर्त अंक असून एक अनावर्त अंक आहे.

$$\text{म्हणून त्याचा हर} = ९९०$$

$$\text{म्हणून संवादी भिन्न} = \frac{१२२}{९९०} = \frac{६१}{४९५}$$

प्रश्नसंग्रह ६

(१) निम्न श्रेढींचे योग काढा.

(क) $१ + ३य + ५य^२ + ७य^३ + \dots$ स पदापर्यंत

(ख) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$ स पदापर्यंत

(ग) $6 \times 7 + 11 \times 7^2 + 16 \times 7^3 + \dots$ स पदापर्यंत

(२) खालील अनंत श्रेणींचे योग काढा.

(१) $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \infty$ पर्यंत

(२) $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots \infty$ पर्यंत

(३) $\sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots \infty$ पर्यंत

(४) $(\sqrt{2} + 1) + 1 + (\sqrt{2} - 1) + \dots \infty$ पर्यंत

(३) खालील श्रेणींचे योग काढा.

(क) $\frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \dots \infty$

(ख) $1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots \infty$

(ग) $1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \dots \infty$

(घ) $\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots \infty$

(४) खालील श्रेणींचे योग काढा.

(क) $3 + 4, 6 + 24, 9 + 124, \dots$ स पदापर्यंत

(ख) $y + k, y^2 + 2k, y^3 + 3k, \dots$ स पदापर्यंत

[कलकत्ता

(ग) $\frac{क}{य} - \frac{ख}{य^2}, \frac{क}{य^3} - \frac{ख}{य^4}, \dots \infty$ य^२ > १

(घ) क + ख + ३क + २ख + ५क + ४ख + २९ पदा-पर्यंत

(५) खालील श्रेढीचा स पदापर्यंत योग काढा व जर अनंतीपर्यंत योग काढणे संभाव्य असेल तर तो काढून दाखवा.

$$१ + \frac{३}{४} + \frac{७}{१६} + \frac{१५}{६४} + \frac{३१}{२५६} + \dots$$

(६) एका श्रेढीच्या स पदांचा योग स च्या सर्व अर्द्या-करिता क + खय^३ आहे तर तिथे स वें पद काढा आणि श्रेढीची जाति कोणती ते सांगा.

(७) खालील आवत दशमिकांचे संवादी भिन्न काढा.

(क) 0.३४६२ (ख) ०.५ (ग) 0.२३७

(८) क आणि ख प्रत्येकी १ पेक्षा लहान असून

$$य = १ + क + क^२ + \dots \infty \text{ आणि}$$

$$र = १ + ख + ख^२ + \dots \infty \text{ असतील तर}$$

$$१ + कख + क^२ख^२ + \dots \infty = \frac{\text{खर}}{य + र - १}$$

सिद्ध करा.

(९) १, २, ३, स ही आद्य पदे असलेल्या स अनंत गुणोत्तर श्रेढींचे योग क्रमशः यो_१, यो_२, यो_३, यो_९ असून त्यांच्या साधारण निष्पत्ती क्रमशः

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{s+1}$ या आहेत तर

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_s = \frac{s}{2}(s+1)$$

आहे हें दाखवा.

[सुंघई]

(१०) [$3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5 \times 3^6 \times \dots$ अनंतीपर्यंत]
ची मर्दा फाटा

प्रकरण सहावें

हरात्मक श्रेढी

(harmonical progression)

६.१ जर $\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$ असेल तर क, ख, आणि ग हरात्मक श्रेढीत आहेत असे म्हणतात.

एखाद्या श्रेढीची कोणतीही लागोपाठची तीन पदे हरात्मक श्रेढीत असल्यास त्या श्रेढीस हरात्मक श्रेढी म्हणतात.

६.११ हरात्मक श्रेढीतील पदांचे व्युत्क्रम समांतर श्रेढीत असतात.

क, ख, ग हरात्मक श्रेढीत आहेत

$$\text{म्हणून } \frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$$

किंवा कख - कग = गक - गख

या समीकाराला कणग ने साधत भागून

$$\frac{१}{ग} - \frac{१}{ख} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{क}$$

ह्या संबंधावरून $\frac{१}{क}, \frac{१}{ख}, \frac{१}{ग}$, समांतर श्रेढीत आहेत
हे सिद्ध होते.

६.२ हरात्मक मध्यक— क आणि ख या कोणत्याहि
दोन राशींच्यामध्ये म चा निवेश करून जर, क, म, ख ही
हरात्मक श्रेढी होत असेल तर म ला क आणि ख यांमधील
हरात्मक मध्यक म्हणतात.

६.२१ हरात्मक मध्यकाची अर्हा काढणे—

म हा क आणि ख यांमधील हरात्मक मध्यक
असल्यास $\frac{१}{क}, \frac{१}{म}, \frac{१}{ख}$ समांतर श्रेढी होते.

$$\text{म्हणून } \frac{१}{म} - \frac{१}{क} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{म}$$

$$\text{किंवा } \frac{२}{म} = \frac{१}{क} + \frac{१}{ख}$$

$$\text{म्हणून } म = \frac{२ क ख}{क + ख}$$

तेव्हा कोणत्याहि दोन राशींमधील हरात्मक मध्यक
त्या दोन राशींच्या गुणाकाराच्या दुपटास त्यांच्या योगाने
भागून येणाऱ्या राशीसमान असतो.

६.२२ हरात्मक मध्यकें— क आणि ख या कोणत्याहि दोन राशींच्यामध्ये $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ चा निवेश करून जर क, m_1, m_2, \dots, m_n , ख ही हरात्मक श्रेढी होत असेल तर m_1, m_2, \dots, m_n , यांना क आणि ख यांमधील हरात्मक मध्यकें म्हणतात.

उदाहरण— ३ आणि २५ यांच्यामध्ये ६ हरात्मक मध्यकांचा निवेश करा.

$m_1, m_2, m_3, \dots, m_6$ ही इष्ट मध्यकें आहेत असे समजा.

म्हणून $\frac{1}{3}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_6}, \frac{1}{25}$ ही ८ पदांची

समांतर श्रेढी होते.

जर या समांतर श्रेढीचा प्रचय च असेल तर

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{3} + 7\text{ च}$$

$$\text{किंवा च} = -\frac{1}{25}$$

यावरून $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \dots, \frac{1}{m_6}$ क्रमशः

$$\frac{7}{25}, \frac{6}{25}, \frac{5}{25}, \dots, \frac{2}{25} \text{ आहेत.}$$

म्हणून इष्ट हरात्मक मध्यकें—

$$\frac{25}{7}, 25, \frac{25}{2}, \dots, 12 \text{ ही आहेत.}$$

६.३ कोणत्याहि दोन घन राशींमधील (१) समांतर मध्यक (२) गुणोत्तर मध्यक आणि (३) हरात्मक मध्यक ह्या तीन राशी स्वतःच गुणोत्तर श्रेढीत असतात. आणि त्यांच्या मधील महत्तम अवरोही (descending) क्रमांत असतात.

क आणि ख या दोन राशींमधील समांतर गुणोत्तर आणि हरात्मक मध्यक अनुक्रमे सा, गा आणि हा आहेत असे समजा.

म्हणून परिभाषेवरून

$$\text{सा} = \frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$$

$$\text{गा} = \sqrt{\text{कख}}$$

$$\text{हा} = \frac{२\text{कख}}{\text{क} + \text{ख}}$$

$$\text{आता सा} \times \text{हा} = \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} \times \frac{२\text{कख}}{\text{क} + \text{ख}}$$

$$= \text{कख}$$

$$= (\sqrt{\text{कख}})^२$$

$$= \text{गा}^२$$

यावरून, सा गा आणि हा गुणोत्तर श्रेढीत असून गा हे गुणोत्तर मध्यक आहे.

$$\text{आता, सा} - \text{गा} = \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} - \sqrt{\text{कख}}$$

$$= \frac{क + ख - २\sqrt{क}\sqrt{ख}}{२}$$

$$= \frac{[\sqrt{क} - \sqrt{ख}]^२}{२}$$

क आणि ख या घन राशी असल्यामुळे $\sqrt{क}$ आणि $\sqrt{ख}$ या वास्तविक राशी आहेत.

म्हणून $(\sqrt{क} - \sqrt{ख})$ सुद्धा वास्तविक आहे.

म्हणून $(\sqrt{क} - \sqrt{ख})^२$ सदैव घनच राहील.

म्हणून सा $>$ गा

अर्थात् कोणत्याही दोन घन राशींमधील समांतर मध्यक, त्यांतील गुणोत्तर मध्यकांपेक्षा अधिक असते.

आता गा हे सा आणि हा यांमधील गुणोत्तर मध्यक असल्यामुळे गा वही वही सा आणि हा यांच्यामध्येच असाच यास पाहिजे. सा $>$ गा सिद्ध केलेंच आहे.

म्हणून ना $>$ दा

अर्थात् कोणत्याही दोन घन राशींमधील समांतर, गुणोत्तर आणि हरात्मक मध्यक अवरोही क्रमांत असतात.

६.३१ हरात्मक श्रेढींतील पदांचा योग काढण्याकरितां कोणतेहि सूत्र नाहो प्रत्यक्ष योग करूनच तो काढावा लागतो.

६.३२ उदाहरण— जर, य, र आणि ल हरात्मक श्रेढीत असतील तर य, (य-ल), (य-र) ह्या राशी आणि ल, (ल-य), (ल-र) ह्या राशीहि हरात्मकश्रेढीत असतात.

समजा, य, य-ल, य-र हरात्मक श्रेढीत आहेत.
तर परिभाषेवरून

$$\frac{य}{य-र} = \frac{य-(य-ल)}{(य-ल)-(य-र)}$$

अर्थात् $\frac{य}{य-र} = \frac{ल}{र-ल}$

किंवा $\frac{य}{ल} = \frac{य-र}{र-ल}$

परंतु हा प्रतिबंध य, र आणि ल हरात्मक श्रेढीत असल्यामुळे पाडला जातोच म्हणून य, य-ल, य-र ह्या राशी हरात्मकश्रेढीत आहेत.

त्याचप्रमाणे ल, ल-य, ल-र या राशी हरात्मक श्रेढीत आहेत हे दाखविता येईल.

प्रश्नसंग्रह ७

(१) हरात्मक मध्यकांचा निवेश करा.

(अ) $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{३२४}$ यांच्यामध्ये ४ हरात्मक मध्यकें

(आ) ४ आणि २ यांच्यामध्ये ३ हरात्मक मध्यकें

(इ) १ आणि ३० यांच्यामध्ये ४ हरात्मक मध्यकें

(ई) १३ आणि $\frac{१}{२३}$ यांच्यामध्ये ५ हरात्मक मध्यकें

(२) एका हरात्मक श्रेढीच्या तीन अनुगामी पदांचा योग $\frac{४७}{६०}$ आहे आणि आद्य पद $\frac{१}{३}$ आहे तर ती श्रेढी

काढा.

(३) ज्या हरात्मक श्रेढीचे आद्यपद क, अंत्यपद ग आणि पदसंख्या स आहे त्या श्रेढीचे न वे पद काढा.

[मद्रास

(४) एका हरात्मक श्रेढीचे त वे पद थ आणि थ वे पद त आहे तर न वे पद $\frac{त \times थ}{न}$ आहे, हे सिद्ध

करा.

[अलाहाबाद

(५) एका हरात्मक श्रेढीचे म वे पद न, आणि न वे पद म , आहे तर $(म + न)$ वे पद $\frac{त \times थ}{त + थ}$ आहे हे दाखवा.

(६) एका हरात्मक श्रेढीचे त वे, थ वे आणि द वे पद क्रमशः क, ख आणि ग आहे तर

$(थ - द)ख ग + (द - त)क ग + (त - थ)क ख = ०$
हे सिद्ध करा.

(७) जर $(र - य)$ आणि $(र - ल)$ यांमधील हरात्मक मध्यक $२(र - क)$ असेल तर $(य - क)$, $(र - क)$ आणि $(ल - क)$ ह्या राशी गुणोत्तर श्रेढीत असतात हे दाखवा.

(८) दोन राशींतील हरात्मक मध्यक १४३ आणि गुणोत्तर मध्यक २४ आहे तर त्या राशी काढा.

(९) दोन राशींमधील समांतर मध्यक त्यांच्या गुणोत्तर मध्यकापेक्षा $\frac{1}{2}$ ने अधिक आहे, आणि गुणोत्तर मध्यक हरात्मक मध्यकापेक्षा $\frac{1}{2}$ ने अधिक आहे तर त्या राशी काढा. [कलकत्ता

(१०) दोन राशींमधील y_1 आणि y_2 , हीं समांतर मध्यकें, r_1 आणि r_2 हीं हरात्मक मध्यकें आणि l_1 आणि l_2 हीं गुणोत्तर मध्यकें आहेत तर
 $y_1, r_1 = y_2, r_2 = l_1, l_2$ आहेत हे सिद्ध करा.

(११) क आणि ख या दोन राशींमधील s_1 आणि s_2 हीं समांतर मध्यकें, g_1 आणि g_2 हीं गुणोत्तर मध्यकें, आणि h_1 आणि h_2 हीं हरात्मक मध्यकें आहेत तर

$$\frac{g_1, g_2}{h_1, h_2} = \frac{s_1 + s_2}{h_1 + h_2} \text{ आहे हे दाखवा. [नागपुर}$$

(१२) एका समांतर आणि एका हरात्मक थेटांचीं आद्यपदें, अन्त्यपदें आणि पदसंख्या समान असल्यास एकीच्या आरंभापासून नवें पद आणि दुसरीच्या अंतापासून नवें पद यांचा गुणाकार न विरहित आहे हे दाखवा.

(१३) त, थ, द, समांतर थेटांत आहेत तर

$$\frac{\text{थद}}{\text{तथ} + \text{तद}} \quad \frac{\text{दन}}{\text{तथ} + \text{थद}} \quad \frac{\text{नथ}}{\text{दत} + \text{दथ}}$$

हरात्मक श्रेढीत आहेत हें सिद्ध करा.

[नागपुर १९३९.

(१४) जर $k^y = ख^r = ग^ल$ आणि $क, ख, ग$ गुणोत्तर श्रेढीत असतील तर $य, र, ल$ या राशी हरात्मक श्रेढीत आहेत हें सिद्ध करा.

(१५) जर $य, र, ल$ या तीन राशी हरात्मक श्रेढीत असतील तर

$$\frac{य}{र+ल-य}, \frac{र}{ल+य-र}, \frac{ल}{य+र-ल} \text{ ह्या राशीहि}$$

हरात्मक श्रेढीत आहेत हें सिद्ध करा.

(१६) जर $क_१, क_२, क_३, क_४$ हरात्मक श्रेढीत असतील तर.

$$\frac{क_१}{क_२+क_३+क_४}, \frac{क_२}{क_१+क_३+क_४}, \frac{क_३}{क_४+क_१+क_२},$$

$$\text{आणि } \frac{क_४}{क_१+क_२+क_३} \text{ ह्या चार राशीहि हरात्मक}$$

श्रेढीत आहेत हें दाखवा.

(१७) जर $क, ख, ग$ समांतर श्रेढीत, $क_१, ख_१, ग_१$ हरात्मक

$$\text{श्रेढीत आणि } \frac{क_१}{ग_१} + \frac{ग_१}{क_१} = \frac{क}{ग} + \frac{ग}{क} \text{ असेल तर } कक_१,$$

खख_१, गग_१ गुणोत्तर श्रेढीत आहेत हें दाखवा.

[कलकत्ता

(१८) जर क, हें फग आणि कख यांमधील; ख, हें कख आणि खग यांमधील आणि ग, हें फग आणि खग यांमधील गुणोत्तर मध्यक अमेल आणि जर क, ख, ग, समांतर थेदीत असतील तर क,^२, ख,^२, ग,^२ समांतर थेदीत आणि ख, + ग,^२, ग, + क, आणि क, + ख, हरात्मक थेदीत आहेत हें सिद्ध करा.

[मद्रास १८९०]

६.५ प्राकृतिक संख्या (natural numbers)—

१, २, ३, ४,.....स, स + १, स + २,...यांना प्राकृतिक संख्या म्हणतात.

६.५१ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांचा योग—

१, २, ३, ४,.....,स-१,स ही समांतर थेदी असून तिचा प्रचय १ आहे.

$$\text{म्हणून योग} = \frac{स}{२} [२ + (स - १)]$$

$$= \frac{स}{२} (स + १)$$

म्हणून पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांचा योग

$$= \frac{स}{२} (स + १)$$

६.५२ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या घातांचा योग—

इष्ट योगाचा योस ने निर्देश करून

$$\text{योस} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2$$

$$\text{माता, } s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1$$

या ऐकात्म्यांत स ऐवजी १, २, ३, यांचा क्रमाने आदेश करा.

$$\text{म्हणजे } 1^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$$

.....

.....

.....

$$(s-2)^3 - (s-3)^3 = 3(s-2)^2 - 3(s-2) + 1$$

$$(s-1)^3 - (s-2)^3 = 3(s-1)^2 - 3(s-1) + 1$$

$$s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1$$

या सर्व ऐकात्म्यांच्या वाम पक्षाचा स्तंभवत् योग

\equiv त्यांच्या दक्षिण पक्षाचा स्तंभवत् योग

$$\text{म्हणून } s^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2]$$

$$- 3[1 + 2 + 3 + \dots + s] + s$$

$$= 3\text{योस} - 3 \frac{s(s+1)}{2} + s$$

$$\therefore 3\text{योस} = s^3 + \frac{3s(s+1)}{2} - s$$

$$= s(s+1) \left(s-1 + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{s(s+1)(2s+1)}{2}$$

$$\therefore \text{योग} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$$

६.५३ पहिल्या स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग—
इष्ट योगाचा योग ने निर्देश करून

$$\text{योग} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3$$

$$\text{आता, } s^4 - (s-1)^4 = 4s^3 - 6s^2 + 4s - 1$$

$$(s-1)^4 - (s-2)^4 = 4(s-1)^3 - 6(s-1)^2 + 4(s-1) - 1$$

$$(s-2)^4 - (s-3)^4 = 4(s-2)^3 - 6(s-2)^2 + 4(s-2) - 1$$

.....

.....

$$3^4 - 2^4 = 4 \times 3^3 - 6 \times 3^2 + 4 \times 3 - 1$$

$$2^4 - 1^4 = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 4 \times 2 - 1$$

$$1^4 - 0^4 = 4 \times 1^3 - 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1$$

या सर्व ऐकात्म्यांच्या वाम पक्षांचा स्तंभवत् योग
= त्यांच्या दक्षिण पक्षांचा स्तंभवत् योग

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } s^4 &= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3) \\ &\quad - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2) \\ &\quad + 4(1 + 2 + 3 + \dots + s) - s \end{aligned}$$

$$\text{किंवा } s^2 = 4\text{योस्त} - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2) + 4(1 + 2 + 3 + \dots + s) - s$$

$$= 4\text{योस्त} - 6 \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} + \frac{4s(s+1)}{2} - s$$

$$\text{म्हणून } 4\text{योस्त} = s^2 + s + s(s+1)(2s+1) - 2s(s+1)$$

$$= s(s+1)[s^2 - s + 1 + 2s + 1 - 2]$$

$$= s(s+1)(s^2 + s)$$

$$\text{म्हणून योस्त} = \frac{s^2(s+1)}{4}$$

$$= \left[\frac{s(s+1)}{2} \right]^2$$

म्हणून स प्राकृतिक संख्यांच्या घनांचा योग त्यांच्या योगाच्या वर्गासमान आहे.

६.६ य संकेतना $[\Sigma \text{ notation}]$ — कोणत्याहि धेढीच सामान्यपद त्याच पदाच्या क्रमांकाचे श्रित असते.

म्हणून ते पद आणि पद संख्या माहीत असल्यास धेढी पुढे दिल्याप्रमाणे मांडता येते.

उदाहरण—

$$(१) \quad १ + २ + ३ + \dots + (s-१) + s = \text{य घ}$$

ध=१

$$(२) \frac{१}{२} + ६ + \frac{१}{१८} + \dots + \frac{१}{२ \cdot ३^{स-२}} + \frac{१}{२ \cdot ३^{स-१}}$$

$$= \sum_{घ=१}^{घ=स} \frac{१}{२ \times ३^{घ-१}}$$

$$(३) क + (क + च) + (क + २च) + \dots + [क + (स - २)च] \\ + [क + (स - १)च] = \sum_{घ=१}^{घ=स} [क + (घ - १)च]$$

य संकेतना दत्तश्रेढीच्या सामान्य पदाच्या मागे लिहितात. सामान्य पदासारख्याच सर्व पदांचा योग करावा असे य संकेतनेमुळे समजले जाते. श्रेढीच्या कोणत्या पदापासून कोणत्या पदापर्यंत योग करावयाचा आहे हे समजण्याकरिता य च्या खाली आद्य पदांक लिहून य च्या पर अंत्यपदांक लिहितात.

$$\therefore \sum_{घ=१}^{घ=स} घ^२ \text{ याचा अर्थ असा की,}$$

१. घ ऐवजी १, २, ३, ४, ..., (स - १), स यांचा क्रमाने आदेश करून यणाच्या सवे पदांचा योग काढावयाचा आहे.

६.७ कांही सोडविलेली उदाहरणे
उदाहरण १— क, क + च, क + २च, ..., या समांतर श्रेढीच्या पहिल्या स पदांच्या चर्माचा योग काढा.

नव्या श्रेढीच्या योगाचा यो ने निर्देश केल्यास

$$यो = क^2 + (क + च)^2 + (क + २च)^2 + \dots$$

$$[क + (स - १)च]^2$$

$$आता सामान्य पद पच = [क + (घ - १) च]^2$$

$$= क^2 + च^2 (घ - १)^2 + २क \times च(घ - १)$$

म्हणून

$$यो = \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} पच$$

$$= \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} [क + (घ - १) च]^2$$

$$= \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} [क^2 + च^2 (घ - १)^2 + २क च (घ - १)]$$

$$= \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} क^2 + \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{च^2} \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} (घ - १)^2$$

$$+ २क च \times \underset{\substack{\text{घ=१} \\ \text{घ=४}}}{य} (घ - १)$$

$$= सक^2 + च^2 \frac{स(स-१)(२स-१)}{६}$$

$$+ २कच \frac{स(स-१)}{२}$$

$$= सक^२ + च^२ \frac{स(स-१)(२स-१)}{६}$$

$$+ कचस(स-१)$$

उदाहरण २— $१ \times ३ \times ५ + २ \times ५ \times ८ + ३ \times ७ \times ११ + \dots$

या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

पहिल्या ३ पदांचे निरीक्षण केल्यास दिसून येते की प्रत्येक पदांत ३ अवयव असून पहिला अवयव त्या पदाच्या क्रमांका पवढा आहे. प्रत्येक पदांतील अवयव समांतर श्रेढीत असून त्या श्रेढीचा प्रथम पदाच्या क्रमांकापेक्षा १ ने अधिक आहे यावरून सामान्य पद

$$प_s = स \times (स + स + १) \times (स + २स + २)$$

$$= स(२स + १)(३स + २)$$

$$= ६ \times स^३ + ७ \times स^२ + २स$$

आता स ला १, २, ३..... स या अर्ही क्रमाने देऊन

$$प_१ = ६ \times १^३ + ७ \times १^२ + २ \times १$$

$$प_२ = ६ \times २^३ + ७ \times २^२ + २ \times २$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$प_s = ६ \times स^३ + ७ \times स^२ + २ \times स$$

स्तंभवत् योग करून

$$प_१ + प_२ + प_३ + \dots\dots + प_s$$

$$= ६(१^३ + २^३ + ३^३ + \dots\dots + स^३)$$

$$\begin{aligned}
& + 7(1^2 + 2^2 + \dots + s^2) \\
& + 2[1 + 2 + 3 + \dots + s] \\
\text{यो} &= 6 \left[\frac{s(s+1)}{2} \right]^2 + 7 \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \\
& \quad + \frac{2s(s+1)}{2} \\
&= \frac{3}{2}(s^2 + s)^2 + \frac{7}{6}[s(s+1)(2s+1)] \\
& \quad + s(s+1) \\
&= \frac{s(s+1)}{6} [2s^2 + 9s + 18s + 7 + 6] \\
&= \frac{s(s+1)(2s^2 + 23s + 13)}{6}
\end{aligned}$$

उदाहरण ३—

५ + ५५ + ५५५ + या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

इष्ट योगाचा यो ने निर्देश करून

$$\begin{aligned}
\text{यो} &= ५ + ५५ + ५५५ + \text{स पदांपर्यंत} \\
&= ५ [१ + ११ + १११ + \text{स पदांपर्यंत}]
\end{aligned}$$

दोन्ही पक्षास ९ ने गुणून

$$\begin{aligned}
९ \text{ यो} &= ५ [९ + ९९ + ९९९ + \text{स पदांपर्यंत}] \\
&= ५ [(१० - १) + (१०^2 - १) + (१०^3 - १) \\
& \quad + \text{स पदांपर्यंत}]
\end{aligned}$$

$$= ५ [१० + १०^२ + १०^३ + \dots + १०^४ - स]$$

$$= ५ \times \frac{१० (१०^४ - १)}{९} - ५ स$$

$$= \frac{५०}{९} (१०^४ - १) - ५ स$$

$$\text{म्हणून यो} = \frac{५०}{८१} (१०^४ - १) - \frac{५ स}{९}$$

$$= \frac{५० (१०^४ - १)}{८१} - \frac{५ स}{९}$$

दाहरण ४—

$१^२ + (१^२ + २^२) + (१^२ + २^२ + ३^२) + \dots$ या श्रेढीच्या स पदांचा योग काढा.

या श्रेढीचें घेणें पद

$$पघ = १^२ + २^२ + ३^२ + \dots + घ^२$$

$$= \frac{घ (घ + १) (२ घ + १)}{६}$$

$$\text{घात पध} = \frac{१}{६} [२ घ^३ + ३ घ^२ + घ]$$

आता, इष्ट योगाचा यो ने निर्देश करून

$$\text{यो} = \sum_{घ=१}^{घ=५} \text{पध}$$

$$= \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \frac{1}{6} [२ \text{ घ}^३ + ३ \text{ घ}^२ + \text{घ}]$$

$$= \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \frac{1}{३} \text{ घ}^३ + \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \frac{1}{२} \text{ घ}^२ + \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \frac{1}{६} \text{ घ}$$

$$= \frac{1}{३} \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \text{ घ}^३ + \frac{1}{२} \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \text{ घ}^२ + \frac{1}{६} \underset{\text{घ=१}}{\overset{\text{घ=स}}{\text{य}}} \text{ घ}$$

$$= \frac{1}{३} \left[\frac{\text{स} (\text{स}+१)}{२} \right]^३ + \frac{1}{२} \frac{\text{स} (\text{स}+१) (२\text{स}+१)}{६} + \frac{1}{६} \frac{\text{स} (\text{स}+१)}{२}$$

$$= \frac{\text{स}^३ (\text{स}+१)^३}{१२} + \frac{\text{स} (\text{स}+१) (२\text{स}+१)}{१२} + \frac{\text{स} (\text{स}+१)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स} (\text{स}+१)}{१२} \left[\text{स} (\text{स}+१) + (२\text{स}+१) + १ \right]$$

$$= \frac{\text{स} (\text{स}+१)}{१२} (\text{स}^२ + ३\text{स} + २)$$

$$= \frac{\text{स} (\text{स}+१) (\text{स}+१) (\text{स}+२)}{१२}$$

$$= \frac{\text{स} (\text{स}+१)^२ (\text{स}+२)}{१२}$$

प्रश्नसंग्रह ८

(१) खालील श्रेढींचा स पदांचे योग काढा—

(क) $२^२ + ४^२ + ६^२ + ८^२ + \dots$

(ख) $१^२ + ३^२ + ५^२ + ७^२ + \dots$

(ग) $५ \times १^२ + ६ \times २^२ + ७ \times ३^२ + \dots$

(घ) $२ \times १^२ + ३ \times २^२ + ४ \times ३^२ + \dots$

(च) $२^२ + ५^२ + ८^२ + \dots$

(छ) $१^३ + ३^३ + ५^३ + \dots$

(ज) $१^२ - २^२ + ३^२ - ४^२ + ५^२ - ६^२ + \dots$

(२) कोणत्याही अनुगामी पूर्णांकाच्या घनांच्या योगाला त्यांच्या योगाने निशेय भाग जातो हे दाखवा.

(३) खालील श्रेढींचे स वे पद आणि स पदांचा योग काढा.

(क) $२ + ५ + १० + १७ + \dots$ [कलकत्ता]

(ख) $२ + ७ + १४ + २३ + \dots$ [मुंबई]

(ग) $२ + ६ + १४ + ३० + \dots$ [कलकत्ता]

(४) जर $यो_१ = १ + २ + ३ + \dots + स,$

$यो_२ = १^२ + २^२ + ३^२ + \dots + स^२$ तर सिद्ध करा

की $३यो_२ + ३यो_१ + (स + १) = (स + १)^३$

[कलकत्ता]

(५) खालील श्रेढींच्या स पदांचा योग काढा.

(क) $१ \times २ + २ \times ३ + ३ \times ४ + \dots$

(ख) $२ \times ३ + ३ \times ५ + ४ \times ७ + \dots$

$$(ग) 1 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9 + \dots$$

$$(घ) 1 \times 1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots$$

$$(ङ) 1^2 \times 3 + 2^2 \times 4 + 3^2 \times 5 + \dots$$

$$(च) 1^2 + (1^2 + 3^2) + (1^2 + 3^2 + 5^2) + \dots$$

$$(छ) (1^2 + 3^2) + (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) \\ + (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2) + \dots$$

$$(ज) \frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3} + \dots$$

$$(झ) (स-1)1 + (स-2)2 + (स-3)3 + \dots$$

$$(ञ) 1 \times स^2 + 2(स-1)^2 + 3(स-2)^2 + \dots \\ + स(1)^2$$

(६) खालील श्रेणीचा स पदांपर्यंत योग काढा.

$$(क) ९ + ९९ + ९९९ + \dots$$

$$(ख) ३ + ३३ + ३३३ + \dots$$

$$(ग) ६ + ६६ + ६६६ + \dots$$

प्रकरण सातवें

द्विघात समीकार

(quadratic equation)

७.१ ज्या एक-अव्यक्त समीकारांत अव्यक्ताच्या उच्च-तम घात दोन असतो त्यास द्विघात समीकार म्हणतात.

उदाहरण— $कय^२ + खय + ग = ०$ हा य ह्या अव्यक्तांत द्विघात समीकार असून त्यांत क, ख, आणि ग हे अचल आहेत. ग या य विरहित पदास समीकाराचें अचल पद म्हणतात.

७.१२ $कय^२ + खय + ग = ०$ हा द्विघात समीकार सोडवणें—

$कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकारास $य^२$ च्या क या गुणकाने भागून

$$य^२ + \frac{ख}{क} य + \frac{ग}{क} = ०$$

समीकाराच्या दोन्ही पक्षांत य च्या गुणकाच्या निम-

पटीचा वर्ग अर्थात् $\frac{x^2}{४क^२}$ मिळवून आणि उपयुक्त पुनर्रचना करून समीकाराचें रूप

$$\left(y + \frac{x}{२क}\right)^2 = \frac{x^2 - ४कग}{४क^२}$$

दोन्ही पक्षाचें वर्गमूळ काढून

$$\therefore y + \frac{x}{२क} = \pm \frac{\sqrt{x^2 - ४कग}}{\sqrt{४क^२}}$$

$$\text{किंवा } y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - ४कग}}{२क}$$

क, ख आणि ग यांच्या पदांत व्यक्त केलेल्या, य च्या वरील अर्ही समीकाराचें समाधान करतात. म्हणून त्यांना समीकाराचीं मूळें (roots) म्हणतात.

७.२ कोणत्याहि द्विघात समीकाराला दोनपेक्षा अधिक मूळें नसतात.

कय^२ + खय + ग = ० या सारख्या द्विघात समीकाराचें समाधान करणारीं दोन मूळें असतात हें आपण मागील अनुच्छेदांत पाहिलेंच आहे.

शक्य असल तर कय^२ + खय + ग = ० या समीकाराला अ, आ, आणि ई हीं तीन मूळें आहेत असें समजा.

आता, प्रत्येक मूळ समीकाराचें समाधान करतें म्हणून

$$क अ^2 + ख अ + ग = 0 \dots\dots\dots (१)$$

$$क आ^2 + ख आ + ग = 0 \dots\dots\dots (२)$$

$$क इ^2 + ख इ + ग = 0 \dots\dots\dots (३)$$

(१) मधून (२) उर्णे करून

$$क(अ^2 - आ^2) + ख(अ - आ) = 0$$

या समीकारास (अ - आ) ने भागा.

समीकाराची मूळे भिन्न आहेत असे गृहीत धरल्यामुळे

$$अ - आ \neq 0$$

$$\therefore क(अ + आ) + ख = 0 \dots\dots\dots (४)$$

त्याचप्रमाणे (२) आणि (३) वरून

$$क(आ + इ) + ख = 0 \dots\dots\dots (५)$$

(४) मधून (५) उर्णे करून

$$क(अ - इ) = 0$$

म्हणून एकतर $क = 0$ किंवा $अ - इ = 0$ असावयास पाहिजे.

पण ही दोन्ही फलं उपकल्पनेला (hypothesis) विरोधी आहेत, कारण

$क = 0$ घेतल्यास समीकाराचा घात कमी होतो आणि $अ = इ$ घेतल्यास समीकाराची मूळे समान होतात.

$$म्हणून $क \neq 0$ आणि $अ \neq इ$$$

यावरून द्विघात समीकाराला दोन पेशा अधिक मूळे असतात असे मानणे चूक आहे.

म्हणून द्विघात समीकाराला दोनपेशा अधिक मूळे

नसतात.

उदाहरण १—

सोडवा — $y^2 - y - 6 = 0$

यांत क = १, ख = -१ आणि ग = -६

म्हणून $\frac{1 + \sqrt{1+24}}{2}, \frac{1 - \sqrt{1+24}}{2}$ ह्या य च्या

दोन मर्ही आहेत.

अर्थात् $y = 3$ किंवा $y = -2$

उदाहरण २—

सोडवा — $2y^2 - 3y - 3 = 0$

(७.१२) वरून

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

७.२१ द्विघात समीकारांच्या मूळांचें पर्यालोचन (discussion)—

$कय^२ + खय + ग = ०$ या द्विघात समीकाराच्या मूळांचें अ आणि आ यांनी अभिधान केलें तर

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क}$$

$$\text{आणि आ} = \frac{-ख - \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क}$$

ख^२ - ४कग या करणीगत राशीचा विचार केल्यास खालील प्रकार संभवतात.

(१) ख^२ - ४कग ही राशि धन असल्यास तिचें वर्गमूळ काढतां येते.

पुन्हा, ही राशि पूर्ण वर्ग असल्यास तिचें वर्गमूळ परिमेय असतें. म्हणून

(इ) (ख^२ - ४कग) पूर्ण वर्ग असल्यास समीकाराचीं दोन्ही मूळें वास्तविक परिमेय आणि भिन्न असतात.

(२) ख^२ = ४कग = ० असल्यास समीकाराचीं दोन्ही मूळें वास्तविक, आणि समान असतात.

(३) ख^२ - ४कग ही राशि ऋण असल्यास तिचें वर्गमूळ काल्पनिक असतें. म्हणून समीकाराचीं दोन्ही मूळें संकर किंवा काल्पनिक असतात. ११

हे सर्व प्रकार खालील प्रमाणें थोडक्यांत लिहितां येतात.

जर ख^२ \geq ४कग असेल

तर ख^२ - ४कग धन, शून्य किंवा ऋण होईल यावरून

(१) जर ख^२ > ४कग तर

समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि भिन्न;

(२) जर ख^२ = ४कग तर समीकाराचीं मूळें वास्तविक आणि समान; आणि (३) जर ख^२ < ४कग तर समीकाराचीं मूळें संकर आणि भिन्न होतील.

या समीकांमुळे द्विघात समीकार न सोडवितांच त्या समीकाराच्या मूळांचें स्वरूप निश्चित होतें. म्हणून $(ख^2 - ४कग)$ या राशीस द्विघात समीकारांचा विवेचक (discriminant) म्हणतात.

टीप— वास्तविक आणि परिमेय गुणक असणाऱ्या समीकारांचीं मूळे करणी किंवा संकर असल्यास ती जोडीनेच येतात हें उदाहरणें सोडवितांना विद्यार्थ्यांच्या लक्षांत येईल.

उदाहरण १— $२य^२ - ३य + ५ = ०$ ह्या समीकाराचें $य$ च्या कोणत्याच वास्तविक अर्थाने समाधान होत नाही हें दाखवा.

या समीकारांत $क = २$, $ख = -३$ आणि $ग = ५$

म्हणून $ख^२ - ४कग = ९ - ४ \times २ \times ५ = -३१$

आता विवेचक ऋण आहे म्हणून समीकाराचीं मूळे संकर आहेत. अर्थात् $य$ च्या कोणत्याच वास्तविक अर्थाने समीकाराचें समाधान होत नाही.

७.३ द्विघात समीकारांतील गुणक आणि त्यांचीं मूळे यांचा परस्परसंबंध.

$कय^२ + खय + ग = ०$ या द्विघात समीकाराचीं $अ$ आणि $आ$ ही मूळे घेतल्यास

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क} \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{आणि आ} = \frac{-ख - \sqrt{ख^२ - ४कग}}{२क} \dots\dots\dots(२)$$

(१) आणि (२) यांचा योग करून

$$\begin{aligned}
 \text{अ + आ} &= \frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग}}{२क} + \frac{-\text{ख} - \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग}}{२क} \\
 &= \frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग} - \text{ख} - \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग}}{२क} \\
 &= \frac{-२\text{ख}}{२क} \\
 &= -\frac{\text{ख}}{क}
 \end{aligned}$$

आता (१) आणि (२) यांचा गुणाकार

$$\begin{aligned}
 \text{अ} \times \text{आ} &= \left[\frac{-\text{ख} + \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग}}{२क} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{-\text{ख} - \sqrt{\text{ख}^2 - ४कग}}{२क} \right] \\
 &= \frac{\text{ख}^2}{४क^२} - \frac{\text{ख}^2 - ४कग}{४क^२} \\
 &= \frac{ग}{क}
 \end{aligned}$$

यावरून

$$\text{मूळांचा योग} = -\frac{\text{ख}}{क}$$

आणि मूळांचा गुणाकार $= \frac{ग}{क}$

७.३१ बरील अनुच्छेदांत काढलेले संबंध प्रस्थापित करण्याची अन्यपद्धति—

कय^२ + खय + ग = ० या द्विघात समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळे असल्यास (य - अ) आणि (य - आ) हे त्याच्या वाम पक्षांतील अवयव असावयास पाहिजेत. म्हणजेच दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर

$$(य - अ) (य - आ) = ०$$

$$\text{किंवा } य^२ - (अ + आ) य + अ \times आ = ० \dots\dots\dots (१)$$

होत असले पाहिजे.

आता कय^२ + खय + ग = ० याला क ने भागा म्हणजे

$$य^२ + \frac{ख}{क} य + \frac{ग}{क} = ० \dots\dots\dots (२)$$

(१) आणि (२) या दोन्ही समीकारांत य^२ चे गुणक समान असून हे दोन्ही समीकार एकच आहेत.

म्हणून त्यांच्या संवादी पदांचे गुणकहि समान आहेत.

$$\text{म्हणून } अ + आ = -\frac{ख}{क}$$

$$\text{आणि } अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

या वरून, ज्या द्विघात समीकारांत य^२ चा गुणक १

असेल त्याच्या मूळांचा योग य च्या गुणकासमान परंतु विरुद्ध चिह्नाचा असतो आणि त्यांचा गुणाकार समीकारांतील अचल पदासमान असतो.

७.४ समीकाराची मूळे दिली असल्यास तो समीकार काढणे—

समजा, अ आणि आ ही एखाद्या समीकाराची मूळे आहेत.

म्हणून $y = अ$ किंवा $y = आ$ या अर्हांनी इष्ट समीकाराचे समाधान होतें.

म्हणजेच $y - अ$ किंवा $y - आ$ हेच समीकाराच्या वाम-पक्षांत असलेल्या पदसंहतीचे अवयव आहेत.

म्हणून इष्ट समीकाराचें रूप :

$$(y - अ)(y - आ) = ०$$

$$\text{किंवा } y^2 - (अ + आ)y + अ \times आ = ०$$

तेव्हा, दिलेली मूळे असणाऱ्या समीकाराचें

$$y^2 - (\text{मूळांचा योग})y + (\text{मूळांचा गुणाकार}) = ०$$

हें रूप होय.

उदाहरण १— २ आणि $-\frac{१}{२}$ ही मूळे असणारा समीकार

काढा.

$$\text{समीकाराचें रूप } (y - २)(y + \frac{१}{२}) = ०$$

$$\text{किंवा } 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

अन्यथा

$$\text{मूळांचा योग} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{मूळांचा गुणाकार} = -1$$

म्हणून इष्ट समीकाराचें रूप

$$y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$$

$$\text{किंवा } 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

जेव्हा दिलेलीं मूळें अपरिमेय किंवा संकर असतात तेव्हा दुसऱ्या पद्धतीचा प्रयोग करणें इष्ट असतें.

उदाहरण २— $(2 + \sqrt{3})$ आणि $(2 - \sqrt{3})$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

$$\begin{aligned} \text{मूळांचा योग} &= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मूळांचा गुणाकार} &= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून इष्ट समीकार } y^2 - 4y + 1 = 0$$

उदाहरण ३— $-2 \pm 3i$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

$$\text{मूळांचा योग} = [-2 + 3i] + [-2 - 3i]$$

$$= - ४$$

$$\begin{aligned}\text{मूलांचा गुणाकार} &= (-२+३\sqrt{-१}) (-२-३\sqrt{-१}) \\ &= ४-९\sqrt{-१}^2 \\ &= ४+९ \quad [\because \sqrt{-१}^2 = -१] \\ &= १३\end{aligned}$$

$$\text{म्हणून हा समीकार } y^2 + ४y + १३ = ०$$

७.५ एकचौ घनमूळ—

१ चौ घनमूळ य ने दाखविल्यास

$$y = \sqrt[3]{१}$$

$$\text{किंवा } y^3 = १$$

$$\text{किंवा } y^3 - १ = ०$$

$$\text{किंवा } (y-१)(y^2+y+१) = ०$$

यावरून,

$$\text{एकतर } (y-१) = ०, \text{ अर्थात् } y = १$$

$$\text{किंवा } y^2 + y + १ = ०$$

$$\text{अर्थात् } y = \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$$

म्हणून १ चौ घनमूळ

$$१, \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२} \text{ ही आहेत.}$$

यांतील प्रत्येक मूळाचा घन केल्यास १ हा अंक येतो हे प्रत्यक्ष घन करून दाखविता येते.

तेव्हा १ ला तीन घनमूळें असून त्यांपैकी एक वास्तविक आणि उरलेलीं दोन अनुबद्ध संकर आहेत.

१ चीं संकर घनमूळें अ आणि आ यांनी दर्शाविल्यास तीं $y^2 + y + 1 = 0$ या समीकाराचें समाधान करतात.

म्हणून त्यांचा गुणाकार $a \times a = 1 \dots \dots \dots (१)$

दोन्ही पक्षांस a^3 ने गुणा.

म्हणजे $a^3 a = a^4$

पण a हें १ चें घनमूळ असल्यामुळे $a^3 = 1$

म्हणून $a = a^4 \dots \dots \dots (२)$

त्याचप्रमाणे $a = a^4 \dots \dots \dots (३)$

हाहि संबध आपण दाखवूं शकतो.

(२) आणि (३) वरून, अ आणि आ हीं १ चीं संकर घनमूळें अशीं आहेत कीं त्यांपैकी कोणत्याहि एकाचा वर्ग दुसऱ्या समान आहे, हें उघड आहे.

१ चीं संकर घनमूळें ओ आणि ओ^२ यांनी दाखविण्याची रूढि आहे.

य च्या ओ या अर्हेने

$y^2 + y + 1 = 0$ या समीकाराचें समाधान होत असल्यामुळे

$ओ^2 + ओ + 1 = 0 \dots \dots \dots (४)$

(४) या समीकारावरून असें दिसून येतें की, १ च्या तिन्ही घनमूळांचा योग शून्य असतो.

पुन्हा ओ आणि ओ^२ ही $y^2 + y + 1 = 0$ चीं मूळें

असल्यामुळे त्यांचा गुणाकार

$$ओ \times ओ^2 = 1$$

$$\text{म्हणून } ओ^3 = 1$$

यावरून आपण सिद्ध केलें की

(१) १ च्या दोन संकर घनमूळांचा गुणाकार १ असतो.

(२) आणि ओ^३ चा पूर्णांक घातहि १ असतो.

७.५१ स हा घनपूर्णांक असल्यास ओ^४ = १ किंवा ओ किंवा ओ^३—

समजा, घ हा एक घन पूर्णांक असून ३ चा अपवर्त्य (multiple) आहे तर स = ३घ

$$\begin{aligned}\text{आता } [ओ]^४ &= [ओ]^{३घ} = [ओ^३]^घ \\ &= १\end{aligned}$$

समजा, स हा एक घनपूर्णांक आहे पण ३ चा अपवर्त्य नाही.

तेव्हा स = ३घ + १ किंवा स = ३घ + २

स = ३घ + १ घेतल्यास

$$\begin{aligned}ओ^४ &= ओ^{३घ+१} = ओ^{३घ} \times ओ \\ &= ओ\end{aligned}$$

आता स = ३घ + २ घेतल्यास

$$\begin{aligned}ओ^४ &= ओ^{३घ+२} = ओ^{३घ} \times ओ^२ \\ &= ओ^२\end{aligned}$$

उदाहरण १—

क^३ + ख^३ चे तीन रेखीय अवयव पाडा.

$$क^3 + ख^3 = (क + ख) (क^2 - कख + ख^2)$$

$$आता १ + ओ + ओ^२ = ०$$

$$म्हणून -१ = ओ + ओ^२$$

$$पुन्हा +१ = ओ^३$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } क^३ + ख^३ &= (क + ख) [क^२ + (ओ + ओ^२)कख + ओ^३ख^२] \\ &= (क + ख) (क + ओख) (क + ओ^२ख) \end{aligned}$$

उदाहरण २—

१, ओ, व ओ^२ हीं १ चीं घनमूळें असल्यास सिद्ध करा की $(१ + ओ^२)^३ = -१$

$$\text{आता, } (१ + ओ^२)^३ = १ + ३ओ^२ + ३ओ^४ + ओ^६$$

$$\text{आता ओ}^३ = १$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } (१ + ओ^२)^३ &= १ + ३ओ^२ + ३ओ + १ \\ &= १ + ३(ओ^२ + ओ) + १ \end{aligned}$$

$$\text{पण } १ + ओ + ओ^२ = ०$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } (१ + ओ^२)^३ &= १ + ३(-१) + १ \\ &= १ - ३ + १ \\ &= -१ \end{aligned}$$

अन्य पद्धतीने

$$१ + ओ + ओ^२ = ०$$

$$१ + ओ^२ = -ओ$$

$$\therefore (1 + ओ^३)^३ = (-ओ)^३$$

$$= -ओ^३$$

$$= -१$$

७.६ ७.३ मधील फलें अत्यंत महत्वाचीं आहेत. त्यांच्या साहाय्याने दिलेल्या द्विघात समीकागांच्या मूळांमधील पद-संहतीची अर्हा त्या समीकागांतील गुणकांच्या पदांत काढता येते हें खालील उदाहरणावरून दिसून येईल

उदाहरण १—

$य^३ - तय + थ = ०$ या समीकाराची अ आणि आ हीं मूळे असल्यास

$$(१) अ^३ + अआ + आ^३;$$

$$(२) अ^३ + आ^३;$$

$$\text{आणि } (३) अ^३ + आ^३$$

यांचें त आणि थ यांच्या पदांत रूप काढा.

अ आणि आ हीं $य^३ - तय + थ = ०$ या समीकारांचीं मूळे असल्यामुळे (७.३) वरून

$$अ + आ = त$$

$$\text{आणि } अ \times आ = थ$$

या फलांचा उपयोग करून

$$(१) अ^३ + अ \times आ + आ^३ = अ^३ + २अ \times आ + आ^३ - अ \times आ$$

$$= (अ + आ)^३ - अ \times आ$$

$$= त^३ - थ$$

$$\begin{aligned}
 (२) \quad अ^३ + आ^३ &= (अ + आ) (अ^२ - अ \times आ + आ^२) \\
 &= [अ + आ][अ^२ + २अ \times आ + आ^२ - ३अ \times आ] \\
 &= [अ + आ] [(अ + आ)^२ - ३अ \times आ] \\
 &= त [त^२ - ३थ] \\
 &= त^३ - ३तथ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (३) \quad अ^४ + आ^४ &= अ^४ + आ^४ + २अ^२ \times आ^२ - २अ^२ \times आ^२ \\
 &= [अ^२ + आ^२]^२ - २अ^२ \times आ^२ \\
 &= [अ^२ + आ^२ + २अ \times आ - २अ \times आ]^२ \\
 &\quad - २अ^२ \times आ^२ \\
 &= [(अ + आ)^२ - २अ \times आ] - २अ^२ \times आ^२ \\
 &= [त^२ - २थ]^२ - २थ^२ \\
 &= त^४ - ४त^२थ + ४थ^२ - २थ^२ \\
 &= त^४ - ४त^२थ + २थ^२
 \end{aligned}$$

उदाहरण २— कय^२ + खय + ग = ० या द्विघात समीकारांचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास (अ^२ + आ^२), (अ^२ + आ^२) हीं दोन मूळें असणारा समीकार काढा.

अ आणि आ हीं कय^२ + खय + ग = ० चीं मूळें असल्यामुळे

$$अ + आ = -\frac{ख}{क}$$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

इष्ट समीकाराच्या मूळांचा योग

$$\begin{aligned}
&= (अ^२ + आ^२) + \left(\frac{१}{अ^२} + \frac{१}{आ^२} \right) \\
&= अ^२ + आ^२ + \frac{अ^२ + आ^२}{अ^२ \times आ^२} \\
&= \frac{(अ^२ + आ^२) (१ + अ^२ आ^२)}{अ^२ \times आ^२} \\
&= \frac{[(अ + आ)^२ - २अ \times आ] [१ + अ^२ आ^२]}{अ^२ \times आ^२}
\end{aligned}$$

(अ + आ) आणि अ × आ यांच्या क. ल. ग यांच्या पदांतील अर्हांचा आदेश करून हे समीकाराच्या मूळांचा योग

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{ख^२}{क^२} - २\frac{ग}{क} \right) \left(१ - \frac{ग^२}{क^२} \right)}{\frac{ग^२}{क^२}} \\
&= \frac{(ख^२ - २कग) (क^२ + ग^२)}{क^२ ग^२}
\end{aligned}$$

हे समीकारांच्या मूळांचा गुणाकार

$$\begin{aligned}
&= (अ^२ + आ^२) \left(\frac{१}{अ^२} + \frac{१}{आ^२} \right) \\
&= \frac{(अ^२ + आ^२)^२}{अ^२ \times आ^२} \\
&= \frac{[(अ + आ)^२ - २अ \times आ]^२}{अ^२ \times आ^२}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^2}{k^2} - 2 \frac{g}{k} \right]^2}{\frac{g^2}{k^2}}$$

$$= \frac{(x^2 - 2kg)^2}{k^2 g^2}$$

म्हणून इष्ट समीकार

$$y^2 = \frac{(x^2 - 2kg)(k^2 + g^2)}{k^2 g^2} y$$

$$+ \frac{(x^2 - 2kg)^2}{k^2 g^2} = 0$$

$$\text{किंवा } k^2 g^2 y^2 - (x^2 - 2kg)(k^2 + g^2)y + (x^2 - 2kg)^2 = 0$$

७.६१ $kx^2 + xy + g = 0$ या समीकाराची मूळे

(१) महत्तम समान परंतु चिन्हांत विरुद्ध किंवा

(२) परस्पराशी व्युत्क्रम किंवा

(३) एक दुसऱ्याच्या म-पट असण्याकरिता लागणारे

प्रतिबंध ठरविणे,

समजा, α आणि β ही दिलेल्या समीकाराची मूळे आहेत.

$$\text{तर } \alpha + \beta = -\frac{x}{k}$$

$$अ \times आ = \frac{ग}{क}$$

आता,

(१) दिलेल्या समीकाराची मूळ महत्तत समान परंतु चिदांत विरुद्ध असल्यास

$$अ = -आ म्हणजे अ + आ = ०$$

$$\text{म्हणून } -\frac{ख}{क} = ०$$

$$\text{किंवा ख} = ०$$

यावरून ख शून्य असेल तर $कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकाराची मूळ महत्तत समान पण चिदांत विरुद्ध असतात.

(२) दिलेल्या समीकाराची मूळ परस्पराशी व्युत्क्रम असल्यास

$$अ = \frac{१}{आ} \text{ म्हणजेच } अ \times आ = १$$

$$\text{म्हणून } \frac{ग}{क} = १$$

$$\text{किंवा ग} = क$$

यावरून जर ग = क असेल तर समीकाराची मूळ परस्पराशी व्युत्क्रम असतात.

(३) दिलेल्या समीकाराचे एक मूळ दुसऱ्याच्या म-पट असल्यास

$$आ = म \times अ$$

$$\text{म्हणून } अ + आ = अ + म \times अ$$

$$\text{म्हणून अ (१ + म) = } -\frac{\text{ख}}{\text{क}} \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{आणि अ} \times \text{आ} = \text{अ} \times \text{मअ}$$

$$\text{म्हणून मअ}^२ = \frac{\text{ग}}{\text{क}} \dots\dots\dots(२)$$

(१) आणि (२) या फलांतून अ चे निरसन केल्यास इष्ट प्रतिबंध मिळतो.

$$\text{अ (१ + म) = } -\frac{\text{ख}}{\text{क}}$$

$$\text{अ}^२ (१ + म)^२ = \frac{\text{ख}^२}{\text{क}^२}$$

$$\text{म्हणून } \frac{(१ + म)^२ \text{ ग}}{\text{क} \times \text{म}} = \frac{\text{ख}^२}{\text{क}^२} \quad \left[\because \text{अ}^२ = \frac{\text{ग}}{\text{कम}} \right]$$

किंवा मअ^२ = कम (१ + म)^२ हा इष्ट प्रतिबंध आहे.

प्रश्नसंग्रह ९

(१) खालील समीकारांच्या मूळांचे स्वरूप ठरवा आणि ती काढा.

$$(१) \text{ य}^२ - ४\text{य} - ३ = ०$$

$$(२) \text{ य}^२ - २\text{य} - २ = ०$$

$$(३) \text{ य}^२ - १४\text{य} + ४२ = ०$$

$$(४) y^2 - 2x + 10 = 0$$

(२) खाली दिलेली मूळ असणारे समीकार काढा.

$$(१) ५, ७ (२) -३, ४ (३) -३, -५ (४) १ \pm \sqrt{2}$$

$$(५) -२ \pm \sqrt{३} (६) ३ \pm ५\sqrt{३} (७) -३ \pm २\sqrt{३}$$

$$(८) -क \pm २\sqrt{२ख}$$

$$(३) y^2 - २(५ + २म)y + ३ (७ + १०म) = ० \text{ ची मूळ}$$

(१) समान असल्यास

किंवा (२) व्युत्क्रम असल्यास

किंवा (३) समान महत्त्वाची परंतु विरुद्ध चिह्नांची असल्यास म च्या अर्ध ठरवा.

$$(४) (क^२म^२ + ख^२)y^२ + २मक^२y + क^२(ग^२ - ख^२) = ०$$

या समीकाराची मूळ समान असल्यास

$$ग = \sqrt{क^२म^२ + ख^२} \text{ हें दाखवा.}$$

$$(५) y^२ - तय + थ^२ = ० \text{ या समीकाराची मूळ वास्तविक असल्यास त ला -२थ आणि +२थ यांच्यामध्ये कोणतीच अर्ध राहू शकत नाही हें दाखवा.}$$

$$(६) y^२ + तय + थ = ० \text{ या समीकाराचे एक मूळ दुसऱ्याच्या वर्गासमान आहे तर}$$

$$त^२ - थ (३त - १) + थ^२ = ० \text{ हें दाखवा}$$

[पाटणा १९३९]

$$(७) जर कय^२ + खय + ग = ० \text{ या समीकाराच्या मूळांची निष्पत्ति न असेल तर}$$

$$कगत^२ + (२कग - ख^२)त + कग = ० \text{ हें दाखवा.}$$

- (८) जर $कय^२ + खय + ग = ०$ च्या मूळांची निष्पत्ति $क, य^२ + ख, य + ग, = ०$ या समीकाराच्या मूळांच्या निष्पत्तीसमान असेल तर

$$\frac{ख^२ ग,}{क} = \frac{ख,^२ ग}{क,} \text{ हें दाखवा.}$$

- (९) $कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळें (१) दोन्ही धन, (२) एक धन आणि दुसरें ऋण असून महत्तम धन मूळापेक्षा अधिक असण्याकरितां प्रतिबंध काढा.
- (१०) $य^२ - १०य + १ = ०$ या समीकाराच्या मूळांचा योग, वियोग आणि गुणाकार काढा.
- (११) जर $कय^२ + खय + ग = ०$ चं एक मूळ दुसऱ्याच्या तिप्पट असलं तर $३ख^२ = १६कग$ आहे हें दाखवा.
- (१२) जर $कय^२ + खय + ग = ०$ चीं अ आणि आ हीं मूळें असतील तर

$$(१) अ^४ + आ^४ \quad (२) \frac{अ^३}{आ} + \frac{आ^३}{अ}$$

आणि (३) $अ^४ आ^४ + अ^४ आ^४$ यांच्या मर्ही काढा.

- (१३) $य^२ + मय + म^२ + न^२ = ०$ चीं मूळें अ आणि आ असल्यास दाखवा की

$$(१) अ^२ + अआ + आ^२ = -न^२ \text{ आणि}$$

$$(२) अ^४ + अ^२ आ^२ + आ^४ = न^४ [२म^२ + ३न^२]$$

[मुंबई १८९०]

- (१४) $य^२ - नय + य^२ = ०$ या समीकाराचीं अ आणि आ मूळें असल्यास

$$(१) \frac{१}{अ^३} + \frac{१}{आ^३} \quad (२) \frac{अ}{आ^३} - \frac{आ}{अ^३} \text{ आणि}$$

$$(३) \frac{अ^२}{आ^३} - \frac{आ^२}{अ^३} \text{ यांच्या अर्ही काढा.}$$

(१५) जर $य^२ - य + १ = ०$ या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असतील तर $\frac{१+अ}{आ}$ आणि $\frac{१+आ}{अ}$ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.

(१६) $य^२ + य + १ = ०$ या समीकाराचीं मूळें अ आणि आ हीं असल्यास

$$\frac{१+अ}{१-अ} \text{ आणि } \frac{१+आ}{१-आ} \text{ हीं मूळें असणारा समीकार काढा.}$$

(१७) $कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

$$(१) \frac{१}{अ+आ}, \quad \frac{१}{अ} + \frac{१}{आ}$$

किंवा (२) $(अ+आ)^२, (अ-आ)^२$ हीं मूळें असणारे समीकार काढा.

(१८) $य^२ - तय + थ = ०$ चीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास

$$(१) \frac{अ}{आ}, \frac{आ}{अ} \text{ किंवा } (२) \frac{२}{अ}, \frac{२}{आ} \text{ किंवा } (३) \frac{१}{अ^३}, \frac{१}{आ^३}$$

$$\text{किंवा (४) } अ + \frac{१}{आ}, आ + \frac{१}{अ}$$

ही मूळें असणारे समीकार काढा.

$$(१९) \quad य^२ - (१ + त^२) य + \frac{१}{२} (१ + त^२ + त^४) = ०$$

या समीकाराचीं अ आणि आ हीं मूळें असल्यास
 $अ^२ + आ^२ = त^२$ हें सिद्ध करा.

[कलकत्ता १९०९]

$$(२०) \quad \text{जर ओ हें एक चें संकर घनमूळ असेल तर}$$

$$(१ - ओ) (१ - ओ^२) (१ - ओ^४) (१ - ओ^८) = ९$$

[पाटणा १९३९]

७.७ त्रिपदसंहतीच्या अर्हत परिवर्तन—

क, ख, आणि ग वास्तविक असल्यास य च्या सर्व वास्तविक अर्हाकरिता $कय^२ + खय + ग$ या पदसंहतीची अर्हा वास्तविक असते. उलट ह्या पदसंहतीची कोणतीहि एक अर्हा असण्याकरितां य ची अर्हा नेहमी वास्तविकच असेल असें नाही.

य ला वास्तविक अर्हा दिल्यास
 $कय^२ + खय + ग$ च्या संभाव्य अर्हा खालील पद्धतीने काढतां येतात.

$$\text{समजा } कय^२ + खय + ग = २$$

आता, य ला केवळ वास्तविक अर्हा दिल्यामुळे

$$कय^२ + खय + ग - २ = ० \text{ चीं मूळेंहि वास्तविक असाव-}$$

यास पाहिजेत. यासाठी समीकाराचा विवेचकहि, धन असाव-
यास पाहिजे.

म्हणजेच $x^2 - ४क (ग - २)$ धन असावयास पाहिजे.
या प्रतिबंधाने २ च्या अर्द्याच्या सीमा निश्चित होतात.
खाली सोडविलेल्या उदाहरणाचें नीट निरीक्षण करा.

उदाहरण—

य च्या वास्तविक अर्द्याकरिता $\frac{y^2 - y + १}{y^2 + y + १}$ ही राशि

३ आणि $\frac{१}{३}$ यांच्यामध्ये आहं हें दाखवा.

समजा,

$$\frac{y^2 - y + १}{y^2 + y + १} = २$$

$$\text{तर } y^2 - y + १ = २(y^2 + y + १)$$

$$\text{म्हणून } y^2(१ - २) - y(१ + २) + १ - २ = ०$$

य च्या अर्द्या वास्तविक आहेत म्हणून या समीकाराचीं
मूळें सुद्धा वास्तविक असावयास पाहिजेत. म्हणून त्याचा
विवेचक धन असावयास पाहिजे.

म्हणजेच $(१ + २)^2 - ४(१ - २)^2$ धन असावयास
पाहिजे

अर्थात् $१ + २२ + २^2 - ४(१ - २२ + २^2)$ धन असावयास
पाहिजे

किंवा $३२ - १०२ + ३$ ऋण असावयास पाहिजे

किंवा $(३२ - १)(२ - ३)$ ऋण असावयास पाहिजे

जर (१) ३२-१ घन आणि २-३ ऋण
 किंवा

(२) ३२-१ ऋण आणि २-३ घन असेल तरच
 र कडून बरील प्रतियंध पाळला जाईल.

(१) ३२-१ घन आणि २-३ ऋण घेतल्यास
 ३२-१ घन असावयास पाहिजे
 $\therefore ३२ > १$

किंवा $२ > \frac{१}{३}$ म्हणून $२ < \frac{१}{३}$ (अ)

आणि २-३ ऋण असावयास पाहिजे

$२ < ३$ म्हणून $२ > ३$ (आ)

म्हणून $\frac{१}{३} < २ < ३$ या र च्या अर्हाकरिता (अ) आणि

(आ) हे प्रतियंध एकाच वेळी पाळले जातात.

(२) (३२-१) ऋण आणि (२-३) घन घेतल्यास
 $(३२-१) < ०$

म्हणून $२ < \frac{१}{३}$

आणि (२-३) घन असावयास पाहिजे.

म्हणून $२ > ३$

आता $r < \frac{2}{3}$ या असमतेंतील r च्या कोणत्याहि

अर्हेने $r > \frac{2}{3}$ ही असमता शक्य होत नाही म्हणून हा प्रकार असंभाव्य आहे.

म्हणून पहिल्या प्रकारावरून

$\frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1}$ ही राशि $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{2}{3}$ यांच्या मध्ये

राहते.

७८ त्रिपदसंहतीच्या चिह्नांत परिवर्तन— य ला सर्व यास्तविक अर्हा दिल्यास $कय^2 + खय + ग$ ह्या पदसंहतीचें चिह्न, जेव्हा $कय^2 + खय + ग = ०$ ह्या समीकाराचीं मूळं यास्तविक आणि भिन्न असतात आणि $य$ ची अर्हा या दोन मूळांमध्ये असतें तेव्हा, $क$ च्या चिह्नाविरोद्ध असते. इतर सर्व अर्हाकरिता $कय^2 + खय + ग$ ह्या पदसंहतीचें चिह्न-प्रमाणें असतें.

प्रकार १ ला— समजा, $कय^2 + खय + ग = ०$ या समीकाराचीं मूळं यास्तविक आणि भिन्न आहेत. तीं $अ$ आणि $आ$ घेतल्यास $अ$, $आ$ पेक्षा मोठें आहे असें समजा.

आता, $कय^2 + खय + ग$

$$= क \left[य^2 + \frac{ख}{क} य + \frac{ग}{क} \right]$$

$$= क [य^2 - (अ + आ) य + अ \times आ]$$

$$= क [य - अ] [य - आ]$$

जर य अ पेक्षा मोठा असेल तर (य-अ) आणि (य-आ) हे दोन्ही अवयव घन होतात आणि य आ पेक्षा लहान असेल तर (य-अ) आणि (य-आ) हे दोन्ही अवयव ऋण होतात.

दोन्ही प्रकारांत (य-अ) (य-आ) हा गुणाकार घनच होतो म्हणून या प्रकारांत क(य-अ) (य-आ) चें चिह्न क प्रमाणेच राहतें.

अर्थात् य अ पेक्षा अधिक किंवा आ पेक्षा लहान असतो, म्हणजेच य जेव्हा अ आणि आ या दोन वास्तविक राशींच्या मध्ये नसतो तेव्हा कय^२+खय+ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणें असतें.

समजा य च्या अर्ही अ आणि आ यांच्यामध्ये आहेत अर्थात् $अ > य > आ$

या प्रकारांत (य-अ) हा अवयव ऋण आणि (य-आ) हा अवयव घन होतो म्हणून

(य-अ) (य-आ) हा गुणाकार ऋण होतो.

म्हणून क (य-अ) (य-आ) चें चिह्न क च्या चिह्ना-विरुद्ध असतें.

म्हणजेच $अ > य > आ$ असल्यास कय^२+खय+ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाविरुद्ध असतें.

प्रकार २ रा—

समजा कय^२+खय+ग=० या पदसंहतीचीं मूळें वास्तविक आणि समान आहेत. अर्थात् $अ=आ$.

आता कय^२+खय+ग=क(य-अ)(य-आ)=क(य-अ)^२

(य-अ)^२ चें चिह्न य च्या वास्तविक अर्हाकरिता सदैव धनच असतें.

म्हणून कय^२ + खय + ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणेच असतें.

प्रकार ३ रा—

समजा कय^२ + खय + ग = ० या समीकाराची मूळें संकर आहेत.

तेव्हा, ख^२ - ४कग ऋण असावयास पाहिजे.

$$\begin{aligned} \text{आता कय}^2 + खय + ग &= क \left[य^2 + \frac{ख}{क} य + \frac{ग}{क} \right] \\ &= क \left[\left(य + \frac{ख}{२क} \right)^2 + \frac{ग}{क} - \frac{ख^2}{४क^2} \right] \\ &= क \left[\left(य + \frac{ख}{२क} \right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४क^2} \right] \end{aligned}$$

(ख^२ - ४कग) ऋण असल्यामुळे, अर्थात् (४कग - ख^२

धन असल्यामुळे $\frac{४कग - ख^2}{४क^2}$ धन होते.

म्हणून य च्या सर्व वास्तविक अर्हाकरिता

$$\left[\left(य + \frac{ख}{२क} \right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४क^2} \right] \text{ ही पदसंहति धन राहते}$$

म्हणून कय^२ + खय + ग या पदसंहतीचें चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणे असतें.

टीप— शेवटच्या दोन प्रकारांवरून असा निष्कर्ष काढता

येनो की ख^२ - ४कग हें ऋण किंवा शून्य असल्यास— अर्थात्
 $कय^२ + खय + ग = ०$ या समीकाराची मूळे संकर किंवा
 वास्तविक आणि समान असल्यास— $कय^२ + खय + ग$ या
 पदसंहतीचे चिह्न क च्या चिह्नाप्रमाणेच असते.

७.८१ जर अ आणि आ हीं $कय^२ + खय + ग = ०$ ची
 मूळे असतील तर $कय^२ + खय + ग$ ही पदसंहति
 $क(य-अ)$ $(य-आ)$ या रूपांत व्यक्त करता येते, हें आपण
 पाहिलेंच आहे.

आता, $कय^२ + खय + ग = ०$ ची मूळे (१) वास्तविक
 आणि भिन्न (२) वास्तविक आणि समान किंवा (३) संकर
 जशी असतील तदनुसार $कय^२ + खय + ग$ या पदसंहतीचे
 अवयव (१) वास्तविक आणि भिन्न (२) वास्तविक आणि समान
 किंवा (३) संकर असतात.

(१) जर $ख^२ > ४कग$ असेल तर $कय^२ + खय + ग$ या
 पदसंहतीचे वास्तविक आणि भिन्न अवयव पडतात.

(२) जर $ख^२ = ४कग$ असेल तर $कय^२ + खय + ग$
 पदसंहतीचे वास्तविक आणि समान अवयव पडतात.
 म्हणजेच $कय^२ + खय + ग$ ही पदसंहति पूर्ण वर्ग आहे.

आणि (३) जर $ख^२ < ४कग$ असेल तर $कय^२ + खय + ग$
 ह्या पदसंहतीचे वास्तविक रेखीय अवयव पडू शकत
 नाहीत.

७.९ य आणि २ यांच्या द्विघाती ध्रिताचे दोन रेखीय
 अवयव पडण्याकरिता लागणारा प्रतियोग.

कय^२ + २जर + खर^२ + २छय + २चर + ग ही पदसंहति
य आणि र यांच्या द्विघाती स्थितार्थे सामान्य रूप आहे.

या पदसंहतीची य च्या अवरोही घातांत पुनर्रचना
करा म्हणजे

$$\text{कय}^२ + य (\text{जर} + \text{छ}) + \text{खर}^२ + २\text{चर} + \text{ग}$$

$$= \frac{१}{\text{क}} \left[\text{क}^२\text{य}^२ + २\text{कय}(\text{जर} + \text{छ}) + \text{कखर}^२ + २\text{कचर} + \text{कग} \right]$$

पहिल्या दोन पदांची घर्गपूर्ति होण्यास लागणारी राशी
मिलवा आणि उणे करा, म्हणजे दिलेली पदसंहति

$$= \frac{१}{\text{क}} \left[(\text{कय} + \text{जर} + \text{छ})^२ - (\text{जर} + \text{छ})^२ + \text{कखर}^२ + २\text{कचर} + \text{कग} \right]$$

$$= \frac{१}{\text{क}} \left[(\text{कय} + \text{जर} + \text{छ})^२ - \left\{ \text{र}^२(\text{ज}^२ - \text{कख}) \right. \right. \\ \left. \left. + २\text{र}(\text{जछ} - \text{कच}) + (\text{छ}^२ - \text{कग}) \right\} \right]$$

$$= \frac{१}{\text{क}} \left[(\text{कय} + \text{जर} + \text{छ})^२ \right. \\ \left. - (\sqrt{\text{र}^२(\text{ज}^२ - \text{कख}) + २\text{र}(\text{जछ} - \text{कच}) + (\text{छ}^२ - \text{कग})})^२ \right]$$

कंसांतील राशि दोन घर्ग राशींचा वियोग आहे
म्हणून तिचे दोन अवयव पाडतां येतात न असे

$$\frac{१}{\text{क}} \left[(\text{कय} + \text{र} + \text{छ}) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\text{र}^२(\text{ज}^२ - \text{कख}) + २\text{र}(\text{जछ} - \text{कच}) + (\text{छ}^२ - \text{कग})} \right]$$

हे अवयव रेखीय असण्याकरिता करणीगत राशि संपूर्ण वर्ग असावयास पाहिजे. त्याकरिता इष्ट प्रतिबंध—
(७.८) वरून

$$४ (जछ - कच)^२ - ४ (ज^२ - कख)(छ^२ - कग) = ०$$

याला सरळरूप देऊन

$$कखग + २चछज - कच^२ - खछ^२ - गज^२ = ०$$

हा प्रतिबंध करणीगत पदसंहतीतील गुणकांनी पाळल्यास आपोआपच य आणि र च्या द्विघात श्रिताचे दोन रेखीय अवयव पडतात.

म्हणून द्विघात श्रिताचे दोन रेखीय अवयव पडण्याकरिता इष्ट प्रतिबंध

$$कखग + २चछज - कच^२ - खक^२ - गज^२ = ० \text{ हा आहे.}$$

७.९१ एक अव्यक्त असणाऱ्या समीकारांना एक साधारण मूळ असण्याकरिता इष्ट प्रतिबंध—

$$समजा कय^२ + खय + ग = ०$$

$$क, य^२ + ख, य + ग, = ०$$

ह्या दोन द्विघात समीकारांचे अ हे साधारण मूळ आहे.

$$तेव्हा कअ^२ + खअ + ग = ०$$

$$\text{आणि } क, अ^२ + ख, अ + ग, = ०$$

तिर्यक् गुणनाने

$$\frac{अ^२}{खग, - ख, ग} = \frac{अ}{गक, - ग, क} = \frac{१}{कख, - क, ख}$$

दुसऱ्याचा वर्ग पहिल्या आणि तिसऱ्याच्या गुणाकारा-
समान होतो ही समता मांडल्यास अ चे निरसन होते.

$$\therefore \frac{अ^2}{(गक, -ग, क)^2} = \frac{अ^2}{(खग, -ख, ग)(कख, -क, ख)}$$

यावरून इष्ट प्रतिबंध—

$$(खग, -ख, ग)(कख, -क, ख) = (गक, -ग, क)^2$$

प्रश्नसंग्रह १०

(१) $६य^२ - य - ४०$ ही पदसंहति घन असल्यास य च्या
अर्हा काढा.

(२) य च्या कोणत्या अर्हामुळे

$$\frac{(य-३)(४य^२-४य+१)}{(य+२)(य^२-३य+३)}$$

ही पदसंहति घन होईल ?

(३) य च्या सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^२+३}{य+१}$ ची अर्हा

२ आणि -६ यांच्यामध्ये राहू शकत नाही हे सिद्ध
करा.

(४) य सर्व वास्तविक अर्हांकरिता $\frac{य^२+१}{य^२+३य+१}$ ची अर्हा

-२ आणि $\frac{2}{5}$ यांच्या मध्ये राहू शकत नाही हे सिद्ध

करा.

(५) य च्या सर्व वास्तविक अर्धांकरीता

$\frac{y^2 - 2y + 8}{y^2 + 2y + 8}$ ची अर्धा ३ आणि $\frac{1}{3}$ यांच्या मध्ये असते
हे दाखवा.

(६) जर य वास्तविक असेल तर

$\frac{2y^2 + 8y - 9}{y^2 + 2y + 3}$ ची अर्धा $-\frac{9}{2}$ आणि २ यांच्यामध्ये
राहते हे दाखवा.

(७) य वास्तविक असेल तर $\frac{3y^2 + 8y + 2}{y^2 + 8y + 2}$ ची अर्धा -१
आणि +१ यांच्या मध्ये राहत नाही हे सिद्ध करा.

[नागपूर १९३९]

(८) जर य वास्तविक असेल तर $\frac{4y^2 - 2y + 3}{2y^2 - 2y + 1}$ च्या

सीमा काढा.

[नागपूर १९३८]

(९) जर य वास्तविक असेल तर

$\frac{y^2 + 38y - 71}{y^2 + 2y - 7}$ ची अर्धा ५ आणि ९ यांच्या मध्ये

राहू शकत नाही.

[मद्रास १९३५]

(१०) य च्या सर्व वास्तविक अर्हाकरिता $\frac{य^2 - ३य + ४}{य^2 + ३य + ४}$ ची

अर्हा ७ आणि $\frac{१}{२}$ यांच्यामध्ये राहते हे सिद्ध करा.

[कलकत्ता १९४०]

(११) जर $t > १$ तर $\frac{य^2 - य}{१ - तय}$ ची अर्हा सदैव वास्तविक

असेते हे दाखवा.

(१२) य च्या सर्व वास्तविक अर्हाकरिता

$\frac{(य-१)(य+३)}{(य-२)(य+४)}$ ची अर्हा $\frac{४}{९}$ आणि १ यांच्यामध्ये

राहत नाही हे दाखवा.

(१३) जर क, ख आणि ग अवरोही क्रिंया आरोही क्रमांत असतील तर य च्या वास्तविक अर्हाकरिता

$\frac{(य-क)(य-ग)}{(य-ख)}$ ला सर्व अर्हा धारण करता येतात

हे दाखवा.

(१४) खालील पदसंदर्तीचे दोन रेखीय अवयव पडत असतील तर त्यांतांल त च्या अर्हा काढा.

(१) $२य^२ + यर - र^२ + तय + ६र - ९$

(२) $१२य^२ + ७यर - तर^२ + १३य + ४५र - ३५$

(३) $१२य^२ - १०यर + २र^२ + ११य - ५र + त$

[मद्रास १९३९]

(१५) जर $३य^२ + ४ मय + २ = ०$ आणि $२य^२ + ३य - २ = ०$ या समीकारांना साधारण मूळ असेल तर म ची अर्ही निश्चित करा.

[कलकत्ता १९३४]

(१६) $कय^२ + खय + ग = ०$ आणि $क, य^२ + ख, य + ग, = ०$ या समीकारांना एक साधारण मूळ आहे.

$\frac{क}{क}, \frac{ख}{ख}, \frac{ग}{ग}$ समांतर श्रेढीत असतील तर

$क, ख, ग$, गुणोत्तर श्रेढीत आहेत हे सिद्ध करा.

(१७) $य^२ + तय + थ = ०$ आणि $य^२ + त, य + थ, = ०$ या समीकारांना एक साधारण मूळ असल्यास ते एकतर

$\frac{तय, -त, थ}{थ - थ,}$ किंवा $\frac{थ - थ,}{त - त,}$ आहे हे दाखवा.

[कलकत्ता १९११]

(१८) जर $य^२ + खय + कग = ०$ आणि $य^२ + गय + कख = ०$ यांना एक साधारण मूळ असल तर त्यांच्या उगलल्या मूळांनी $य^२ + कय + खग = ०$ ह्या समीकाराचा समाधान होतो, हे सिद्ध करा.

[कलकत्ता १८९२]

(१९) जर $कय^२ + २खय + ग = ०$ आणि $क, य^२ + २ख, य + ग, = ०$ या समीकारांना एक साधारण असल तर $(ख^२ + गग)य^२ +$

$(२खग, - कग, - गक,)य + ख, - क, ग, = ०$ या समीकारांची मूळे समान असतात, हे सिद्ध करा.

- (२०) जर $कय^२ + २खय = ग = ०$ या समीकाराची मूळे अ आणि आ; आणि $क, य^२ + ख, य + ग, = ०$ या समीकाराची मूळे (अ + इ) आणि (आ + इ) ही असतील तर

$$\frac{ख, - कग}{क^२} = \frac{ख,^२ - क, ग,}{क,^२} . \quad \text{है दाखवा.}$$

[फलकत्ता १९१२

- (२१) $य^२ + ६य + क$ आणि $य^२ + १२य + ३क$ यांना एक साधारण अवयव असेल तर $क$ ची अर्धा निश्चित करा.
- (२२) $र - मय$ आणि $मर + य$ हे क्रमशः $कय^२ + २जयर + खर^२$ आणि $क, य^२ + २ज, यर + ख, र^२$ यांचे अवयव असण्यासाठी लागणारा प्रतिबंध काढा.

प्रकरण आठवें

समीकार

भाग पहिला (एक अव्यक्त)

८.१ ज्या समीकारांची साधनरीति द्विघात समीकाराच्या साधनरीतीवर अवलंबून असते अशा समीकारांच्या या अनुच्छेदांत विचार करूं.

प्रथम दिलेला समीकार, $कर^२ + खर + ग = ०$ या द्विघात समीकाराच्या रूपांत प्रहसित केला जातो. र हा दिलेल्या समीकारांतील अव्यक्त राशीचें श्रित असतो. $कर^२ + खर + ग = ०$ हा समीकार सोडवून र च्या ज्या दोन अर्ही येतात त्यांच्यामुळे य मध्ये दोन समीकार प्राप्त होतात. हे समीकार य करिता सोडवून येणाऱ्या अर्हींनी दिलेल्या समीकाराचें समाधान होतें.

योग्य तें परिवर्तन आणि पुनर्रचना यांच्या योगें समीकार कसे सोडविले जातात हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— सोडवा—

$$यसं + २य - ४ - ३ = ०$$

दिलेल्या समीकारांत $y^2 = 2$ ठेवा।

अर्थात् $y^2 = \frac{1}{2}$

या आदेशामुळे दिलेल्या समीकाराचे रूपांतर खालील समीकारांत होतें.

$$x + \frac{2}{x} - 3 = 0$$

किंवा $x^2 - 3x + 2 = 0$

किंवा $(x-1)(x-2) = 0$

अर्थात् $x=2$ अथवा $x=1$

पण $y^2 = 2$

म्हणून $y^2 = 2$ तसेच $y^2 = 1$

म्हणून $y = 2$ तसेच $y = 1$

उदाहरण २— सोडवा —

$$2y^2 - 3y - 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} + 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{आता, } 2y^2 - 3y - 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} + 8 \\ = (2y^2 - 3y + 2) - 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} + 2 \\ = 0 \end{aligned}$$

यांत $\sqrt{2y^2 - 3y + 2} = z$ ठेवा

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{किंवा } (x-2)(x-1) = 0$$

$$\text{अर्थात् } x=2 \text{ किंवा } x=1$$

$$\text{पण } x = \sqrt{2y^2 - 3y + 2}$$

$$(1) \quad x = 2 \text{ घेतल्यास}$$

$$2y^2 - 3y + 2 = 4$$

$$\text{किंवा } 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\text{किंवा } (y-2)(2y+1) = 0$$

$$\text{म्हणून } y=2 \text{ किंवा } y=-\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad x=1 \text{ घेतल्यास चर्मा करून}$$

$$2y^2 - 3y + 2 = 1$$

$$\text{किंवा } 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\text{किंवा } (2y-1)(y-1) = 0$$

$$\text{म्हणून } y = \frac{1}{2} \text{ किंवा } y=1$$

$$\text{म्हणून इष्ट मूलें } y = \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 2$$

उदाहरण ३— सोड्या—

$$(y-1)(y-3)(y+4)(y+2) + 16 = 0.$$

$$\text{आता } (y-3)(y+4) = y^2 + y - 12$$

$$\text{आणि } (y-1)(y+2) = y^2 + y - 2$$

योग्य निवड करून दोन दोन अवयवांचा गुणाकार
 केल्यास दिलेल्या समीकाराचे रूपांतर

$$(y^2 + y - 12)(y^2 + y - 2) + 16 = 0$$

आता $y^2 + y = 2$ ठेवा.

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$$(2 - 12)(2 - 2) + 16 = 0$$

$$\text{किंवा } 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$\text{किंवा } (2 - 10)(2 - 4) = 0$$

$$\text{म्हणून } 2 = 10 \text{ किंवा } 2 = 4$$

$$\text{पण } 2 = y^2 + y$$

$$\text{म्हणून } y^2 + y = 10 \text{ किंवा } y^2 + y = 4$$

आता $y^2 + y = 10$ या समीकाराची मूळे

$$\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \text{ हीं येतात.}$$

आणि $y^2 + y = 4$ या समीकाराची मूळे

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ हीं येतात.}$$

$$\text{म्हणून इष्ट मूळे } \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \text{ आणि } \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

८.११ घातसमीकार [exponential equations]—
 ज्या समीकारांतील अव्यक्त, एका किंवा अनेक व्यक्त

राशींच्या घातांत आढळतो त्या समीकाराला घात समीकार म्हणतात.

अशा प्रकारचे समीकार कसे सोडवितात हें पुढे सोडवून दाखविलेल्या उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— $३^{२य+१} = ८१ \times ३^५$ हा समीकार सोडवा.

$$\text{आता } ३^{२य+१} = ८१ \times ३^५$$

$$= ३^४ \times ३^५$$

$$= ३^९$$

दोन्ही पक्षांत आधार तोच असल्यामुळे त्यांचे घातही समान आहेत.

$$\text{म्हणून } २य+१=९$$

$$\text{किंवा } य=४$$

उदाहरण २— सोडवा—

$$२^{२य+३} - ५७ = ६५ (२य - १)$$

$$२^{२य+३} - ५७ = ६५ (२य - १)$$

$$\text{म्हणून } २^{२य} \times २^३ - ५७ + ६५ = ६५ \times २य$$

$$\text{किंवा } ८ \times २^{२य} - ६५ \times २य + ८ = ०$$

$$\text{आता } २य = र \text{ ठेवा}$$

या आदर्शामुळ रूपांतरित समीकार

$$८र^२ - ६५र + ८ = ०$$

$$\text{किंवा } (र-८) (८र-१) = ०$$

$$\text{म्हणून } र' = ८ \text{ किंवा } र = \frac{१}{८}$$

पण $x=2^y$

म्हणून $2^y=4$ किंवा $2^y=\frac{1}{4}$

आता $2^y=2^3$ किंवा $2^y=\frac{1}{2^3}$

म्हणून $y=3$ किंवा $y=-3$

८.२ ८.१ या अनुच्छेदांत

$\sqrt{कय^2 + खय + ग} + त = \sqrt{कय^2 + खय + ग} = य$

या प्रकारचा समीकार, यथायोग्य आदेशाने प्रथम करणी-चिन्हाचें निरसन करून सोडविला आहे. परंतु करणी-चिन्हाचें निरसन करण्यापूर्वी त्यांत एखादा साधारण अवयव आहे की काय ह्याचें परीक्षण करणें इष्ट असतें. असा अवयव असल्यास त्याने संपूर्ण समीकारास साधंत भागाचें म्हणजे समीकाराचें रूप अधिक सरल होतें.

उदाहरण १— सोडवा—

$$\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$$

दिलेला समीकार

$$\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$$

$$\sqrt{(य-५)(य+३)} - \sqrt{(य-५)(य-२)} = य - ५$$

असाहि लिहितां येतो. यांतून $\sqrt{य-५}$ हा साधारण अवयव काढून टाकल्यास राहिलेला समीकार

$$\sqrt{y+3} - \sqrt{y-2} = \sqrt{y-4}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$$y+3+y-2-2\sqrt{(y+3)(y-2)} = y-4$$

$$\text{किंवा } y+6=2\sqrt{(y+3)(y-2)}$$

पुन्हा वर्ग करून

$$y^2 + 12y + 36 = 4y^2 + 8y - 28$$

$$\text{म्हणून } 3y^2 - 4y - 60 = 0$$

$$\text{अर्थात् } (3y+10)(y-6)=0$$

$$\text{म्हणून } y = -\frac{10}{3} \text{ किंवा } y=6$$

आता $\sqrt{y-4}$ हा साधारण काढलेला अवयव शून्या-
सम मांडून $y=4$ हेहि मूळ मिळते.

$$\text{आता दिलेल्या समीकारांत } y = -\frac{10}{3} \text{ ठेवल्यास त्याचें}$$

समाधान होत नाही. म्हणून $-\frac{10}{3}$ हें समीकाराचें इष्ट मूळ

नाहो. परंतु $y=4$ किंवा 6 ठेवल्यास समीकाराचें समाधान
होतें म्हणून इष्ट मूळ $y=4$; $y=6$

टीप— समीकागांधरील उदाहरणें सोडवितांना कांही
घेळां करणीचिन्हांचें निरसन करण्याकरितां समीकाराचा
वर्ग करावा लागतो. असें करतांना समीकाराचा घात वाढतो

आणि त्यामुळे अव्यक्ताच्या कांही अर्हा अशा येतात की त्यांनी, दिलेल्या समीकाराचें समाधान होत नाही. अर्थात् अशा अर्हा समीकाराचीं मूळें म्हणून ग्राह्य मानतां येत नाहीत. ज्या अर्हा समीकाराचें समाधान करतात त्याच केवळ त्यांचीं मूळें म्हणून ग्राह्य मानतात.

८.३ व्युत्क्रम समीकार (reciprocal equation)

$$६य^४ - १७य^३ + २५य^२ - १७य + ६ = ०$$

$$\text{किंवा } ४य^४ - १२य^३ + ७य^२ + ७य^२ - १२य + ४ = ०$$

या समीकाराचें निरीक्षण करा.

ह्या समीकारांत y ऐवजी $\frac{1}{y}$ लिहिलें आणि नंतर त्यांना

सरळ रूप दिलें तर त्यांच्या रूपांत मुळीच परिवर्तन होत नाही, असें दिसून येतें. अशा समीकारांना व्युत्क्रम समीकार म्हणतात.

व्युत्क्रम समीकाराची परिभाषा—ज्या समीकारांत अव्यक्ताऐवजी त्याच्या व्युत्क्रमाचा आदेश केला तर तो अपरिवर्तित राहतो त्याला व्युत्क्रम समीकार म्हणतात.

व्युत्क्रम समीकार सोडविण्याची पद्धति पुढे सोडविलेल्या उदाहरणावरून माहीत होईल.

सोडवा—

$$६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$$

$y^२$ हें वाम पक्षांतील गुणकारित मध्यपद आहे.

त्याने समीकाराला साधंते भागा म्हणजे

$$६य^२ - ३५य + ६२ - \frac{३५}{य} + \frac{६}{य^२} = ०$$

पदांची पुनर्रचना करून

$$६(य^३ + \frac{१}{य^२}) - ३५(य + \frac{१}{य}) + ६२ = ०$$

$$\text{आता, } य + \frac{१}{य} = २ \text{ ठेवा.}$$

$$\text{म्हणून } य^३ + \frac{१}{य^२} = (य + \frac{१}{य})^३ - २ \\ = २^३ - २$$

$$य^३ + \frac{१}{य^२} \text{ आणि } य + \frac{१}{य} \text{ यांच्या अर्हा ठेवून}$$

रूपांतरित समीकार

$$६(२^३ - २) - ३५२ + ६२ = ०$$

$$६२^३ - १२ - ३५२ + ६२ = ०$$

$$\text{किंवा } ६२^३ - ३५२ + ५० = ०$$

$$\text{किंवा } (३२ - १०)(२२ - ५) = ०$$

$$\text{अर्थात् } २ = \frac{१०}{३} \text{ अथवा } २ = \frac{५}{२}$$

$$(१) \text{ आता } २ = \frac{१०}{३} \text{ घेतल्यास}$$

$$य + \frac{१}{य} = २ = \frac{१०}{३}$$

$$\text{किंवा } 3y^2 - 10y + 3 = 0$$

$$\text{गृहणून } (3y-1)(y-3) = 0$$

$$\text{अर्थात् } y = \frac{1}{3} \quad \text{किंवा } y = 3$$

$$(2) \quad \text{आता } r = \frac{5}{2} \quad \text{घेतल्यास}$$

$$y + \frac{1}{y} = r$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\text{किंवा } (2y-1)(y-2) = 0$$

$$\text{अर्थात् } y = \frac{1}{2} \quad \text{किंवा } y = 2$$

समीकाराचीं इष्ट मूळे $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$, हीं आहेत.

य ऐवजी $\frac{1}{y}$ चा आदेश करून समीकाराचें रूप कां बदलत नाही हें य च्या चरील अर्द्दावरून स्पष्ट होतें.

टीप— समघाती व्युत्क्रम समीकार सोडविण्याची पद्धति वर दिली आहे. आता, व्युत्क्रम समीकाराचा घात

विषय असतो तेव्हा १ अथवा -१ यांपैकी एक समीकारांचे मूळ असते. या मूळाचा संवादी गुणक काढून टाकल्यानंतर शेष समीकार समघाती होतो. नंतर तो वर दिलेल्या पद्धतीने सोडविता येतो.

८.३१ खालील समीकार व्युत्क्रम नसूनसुद्धा मागील अनुच्छेदांत दिलेल्या पद्धतीने सोडविता येतो.

उदाहरण— $८य^४ + ४२य^३ + २९य^२ - ४२य + ८ = ०$

य^३ ने साद्यंत भागून नंतर पदांची पुनर्रचना करून

$$८ \left(य^२ + \frac{१}{य^२} \right) + ४२ \left(य - \frac{१}{य} \right) + २९ = ०$$

$$\text{यांत } य - \frac{१}{य} = र \text{ ठेवा.}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणजे } य^२ + \frac{१}{य^२} &= \left(य - \frac{१}{य} \right)^२ + २ \\ &= र^२ + २ \end{aligned}$$

$$\left(य^२ + \frac{१}{य^२} \right) \text{ आणि } \left(य - \frac{१}{य} \right) \text{ यांच्या अर्हांचा आदेश}$$

करून रूपांतरित समीकार

$$८(र^२ + २) + ४२र + २९ = ०$$

$$\text{किंवा } ८र^२ + ४२र + ४७ = ०$$

$$\text{किंवा } (२र + ३) (४र + १५) = ०$$

$$\text{अर्थात् } r = -\frac{3}{2} \quad \text{किंवा } -\frac{14}{8}$$

(१) आता, $r = -\frac{3}{2}$ ही अर्हा घेतल्यास

$$y - \frac{1}{y} = r$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\text{किंवा } 2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$\text{किंवा } (2y-1)(y+2) = 0$$

$$\text{अर्थात् } y = \frac{1}{2} \quad \text{किंवा } y = -2$$

(२) आता, $r = -\frac{14}{8}$ ही अर्हा घेतल्यास

$$y - \frac{1}{y} = r$$

$$= -\frac{14}{8}$$

$$\text{किंवा } 8y^2 + 14y - 8 = 0$$

$$\text{किंवा } (y+8)(8y-1) = 0$$

$$\text{अर्थात् } y = -8 \quad \text{किंवा } y = \frac{1}{8}$$

म्हणून य च्या इष्ट अर्हा $\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{8}, -8$

प्रश्नसंग्रह ११

खालील संमीकार सोडवा—

(१) $4\sqrt{\frac{x}{y}} + 9\sqrt{\frac{y}{x}} = 22\frac{1}{2}$

(२) $2\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 3$

(३) $\sqrt{y+1} + 2\sqrt{\frac{y}{y+1}} = 3$

(४) $2^{2y+6} + 1 = 32 \times 2^y$ [नागपूर]

(५) $2(y^2 - 3y + 1)^2 + 4(y^2 - 3y + 1) + 3 = 0$

[फलकत्ता]

(६) $(y+2)(3y+1)(y-1)(3y+2) = 228$ [मुंबई]

(७) $(y+8)(y+9)(y+6)(y+11) + 20 = 0$

[मद्रास १९१२]

(८) $(y+1)(y+2)(y+3)(y+8) = 28$

[मद्रास १९२३]

(९) $(y^2 + 4y)(y^2 + 11y + 28) = 16$ [मद्रास १९११]

(१०) $\sqrt{y+2} + \sqrt{y-3} = 4$ [पंजाब]

(११) $y^2 - y + 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} = \frac{y}{2} + 7$

$$(१२) \quad y^2 + y + १० \sqrt{y^2 + ३y + १६} = २(२० - y)$$

$$(१३) \quad ३y + २ \sqrt{y^2 - ३y + ९} = y^2 + ६ \quad \begin{matrix} \text{[मद्रास]} \\ \text{[कलकत्ता]} \end{matrix}$$

$$(१४) \quad y^2 + \sqrt{y^2 - ५} = ११$$

$$(१५) \quad \sqrt{y^2 + ६y - ७} - \sqrt{३y^2 - ५y + २} = y + १$$

$$(१६) \quad \sqrt{२७y^2 + २१y + ४} + \sqrt{१८y^2 - y - ४} = ९y + ४$$

$$(१७) \quad ८y^4 - ५४y^3 + १०२y^2 - ५४y + ८ = ०$$

$$(१८) \quad १२y^4 + २८y^3 - ९y^2 - २८y + १२ = ०$$

$$(१९) \quad १५y^4 + १२८y^3 + २९०y^2 + १२८y + १५ = ०$$

$$(२०) \quad १२y^4 - १६y^3 - ३७y^2 + ३७y + १६y - १२ = ०$$

॥

द्वितीय भाग (दोन अव्यक्त)

युगपत्-समीकार

(simultaneous equations)

८.३ य आणि र यांच्या दोन युगपत् समीकारांपैकी एक एकघाती आणि दुसरा द्विघाती असल्यास एकघाती समीकारांतील एक अव्यक्त दुसऱ्या अव्यक्तान्या पक्षांमध्ये ठरवत दाखवून त्या द्विघाती समीकारांत अदिश करतात. यामुळे त्या द्विघाती समीकारांत केवळ एकच

अव्यक्त राहतो. हा समीकार सोडवून एका अव्यक्ताच्या अर्हा प्राप्त होतात. ह्यांचा एकघाती समीकारांत आदेश करून उरलेल्या अव्यक्ताच्या अर्हा मिळतात.

उदाहरण— सोडवा—

$$५य + २र = १२$$

$$२य^२ + ३यर + र^२ = १५$$

[फलकत्ता १८८८

पहिल्या समीकारावरून, $र = \frac{१२ - ५य}{२}$

दुसऱ्या समीकारांत र च्या या अर्ह्या आदेश करून

$$२य^२ + ३य \times \frac{१२ - ५य}{२} + \left(\frac{१२ - ५य}{२} \right)^२ = १५$$

$$\text{किंवा } ३य^२ - ४८य + ८४ = ०$$

$$\text{किंवा } य^२ - १६य + २८ = ०$$

$$\text{किंवा } (य - १४)(य - २) = ०$$

$$\text{अर्थात् } य = १४ \text{ किंवा } य = २$$

पहिल्या समीकारांत $य = २$ ठेवल्यास $र = १$ आणि

$य = १४$ ठेवल्यास $र = -२९$

$$\left. \begin{array}{l} \text{म्हणून } य = २ \\ \text{र} = १ \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{किंवा } य = १४ \\ \text{र} = -२९ \end{array} \right\}$$

ही समीकाराचीं दोन मूळे होत.

८.४१ समानघात (homogeneous) समीकार

ज्या समीकाराच्या प्रत्येक पदांतील अव्यक्तांच्या घातांचा योग तोच असतो त्या समीकाराला समानघात समीकार म्हणतात.

उदाहरणार्थ— $k_1y^2 + k_2x^2 + k_3xy = 0$

$$k_1y^2 + k_2x^2 + k_3xy = 0$$

हे समानघात समीकार आहेत.

$$४y^2 - ५xy + ३x^2 = १६$$

$$३y^2 - २५xy + ३x^2 = ८$$

अशा प्रकारच्या समीकारांत अचल पदाध्यविरहित इतर प्रत्येक पदांत अव्यक्तांच्या घातांचा योग तोच आहे. म्हणून जसे समीकारहि समानघात समीकारांतच मोडतात. ते सोडविण्याची पद्धति पुढील उदाहरणावरून समजेल.

उदाहरण— सोडवा—

$$y^2 + ५xy + ४x^2 = ६ \dots\dots\dots (१)$$

$$३y^2 + ८x^2 = १४ \dots\dots\dots (२)$$

(१) आणि (२) मध्ये $x = ४y$ ठेवा.

म्हणजे (१) चे रूपांतर $y^2 + ४y^2 + ४(४y)^2 = ६$

$$\text{किंवा } y^2(१ + ४ + ४४) = ६ \dots\dots\dots (३)$$

$$(२) \text{ चे रूपांतर } ३y^2 + ८(४y)^2 = १४$$

$$\text{किंवा } y^2(३ + ८४) = १४ \dots\dots\dots (४)$$

(३) ला (४) ने भागून

$$\frac{१ + ४ + ४४}{३ + ८४} = \frac{६}{१४} = \frac{३}{७}$$

$$\text{किंवा } 8\theta^2 + 7\theta - 2 = 0$$

$$\text{किंवा } (8\theta - 1)(\theta + 2) = 0$$

$$\text{अर्थात् } \theta = \frac{1}{8} \text{ किंवा } \theta = -2$$

$$\text{म्हणून } r = \frac{1}{8}y \text{ किंवा } r = -2y$$

आता, (अ)

$$(2) \text{ मध्ये } r = \frac{1}{8}y \text{ ठेवून}$$

$$y^2 \left(3 + \frac{1}{2} \right) = 18 \quad *$$

$$\text{किंवा } y = \pm 2$$

$$\text{तेव्हा } r = \pm \frac{1}{2}$$

आणि (आ)

$$(2) \text{ मध्ये } r = -2y \text{ ठेवून}$$

$$y^2 (3 + 2) = 18$$

$$y^2 = \frac{2}{5}$$

$$\text{किंवा } y = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{म्हणून } r = \mp 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

एकंदरीत, य आणि र यांच्या खालील युग्मांनी समीकारांचे समाधान होतें.

$$\left. \begin{array}{l} y=2 \\ r=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=-2 \\ r=-\frac{1}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{10}}{5} \\ r=-2\frac{\sqrt{10}}{5} \end{array} \right\} y=-\frac{\sqrt{10}}{5} \\ = 2\frac{\sqrt{10}}{5}$$

८.४२ संमितीय (symmetrical) समीकार

एका समीकारांतील अव्यक्तांच्या व्यतिहरणामुळे त्याच्या रूपांत परिवर्तन होत नाही त्याला संमितीय समीकार म्हणतात.

खालील समीकार य आणि र यांच्यामध्ये संमितीय आहेत.

$$\left. \begin{array}{l} y+r=8 \\ yr=3 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} yr+y+r=29 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

असे समीकार मोडयिण्याकरिता, त्यांतील अव्यक्त दुसऱ्या कोणत्याहि दोन अव्यक्तांच्या क्रमशः योगासमान आणि विभोगासमान घेऊन, दिलेले समीकार नवीन अव्यक्तांत व्यक्त करतात.

उदाहरणार्थ, सोडवा—

$$y^3 + r^3 = 9 \dots\dots\dots (1)$$

$$y + r = 3 \dots\dots\dots (2)$$

य = प + फ आणि र = प - फ ठेवा

(२) वरून, (प + फ) + (प - फ) = ३

∴ किंवा २प = ३

किंवा $प = \frac{३}{२}$

आता, $य = \frac{३}{२} + फ$ आणि $र = \frac{३}{२} - फ$ या

अर्था (१) मध्ये ठेवा म्हणजे

$$\left(\frac{३}{२} + फ\right)^२ + \left(\frac{३}{२} - फ\right)^२ = ९$$

$$\text{किंवा } २ \left[\left(\frac{३}{२}\right)^२ + \frac{१}{२} फ^२ \right] = ९$$

$$\text{किंवा } \frac{२७}{४} + १फ^२ = ९$$

$$३६फ^२ = ९$$

$$फ = \pm \frac{१}{२}$$

(अ) $फ = + \frac{१}{२}$ घेतल्यास

$$य = \frac{३}{२} + \frac{१}{२}$$

$$= 2$$

$$r = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

आणि (आ) $r = -\frac{1}{2}$ घेतल्यास

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$r = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

$$\text{म्हणून } \left. \begin{array}{l} y = 2 \\ r = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ r = 2 \end{array} \right\}$$

८.४३ खालील उदाहरणांत दिलेले समीकार सामंतीय नसून सुद्धा ते मागील अनुच्छेदांत दिलेल्या रीतीनेच सोडवितां येतात.

उदाहरण— $y^2 + r^2 = 5$ (१)

$y - r = 2$ (२)

$y = 5 + r$ आणि $r = 5 - r$ ठेवा

(२) मध्ये y आणि r यांच्या जर्हा ठेवून

$$2r = 2$$

$$\text{किंवा } x=1$$

$$\text{तेव्हा } y=p+1$$

$$r=p-1$$

(१) मध्ये y आणि r यांच्या अर्ही ठेवल्यास

$$(p+1)^2 + (p-1)^2 = 46$$

$$\text{किंवा } 2(p^2 + 6p^2 + 1) = 46$$

$$\text{किंवा } p^2 + 6p^2 - 23 = 0$$

$$\text{किंवा } (p^2 + 2)(p^2 - 3) = 0$$

$$\text{अर्थात् } p = \pm 3\sqrt{-1} \text{ किंवा } p = \pm \sqrt{3}$$

आता $y=p+1$ आणि $r=p-1$ या समीकारांत p च्या अर्ही ठेवून

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\sqrt{-1} + 1 \\ r = 3\sqrt{-1} - 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = -3\sqrt{-1} + 1 \\ r = -3\sqrt{-1} - 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = +\sqrt{3} + 1 \\ r = +\sqrt{3} - 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = -\sqrt{3} + 1 \\ r = -\sqrt{3} - 1 \end{array} \right\}$$

८.५ मागील कांही अनुच्छेदांत प्रमाण समीकार सोडविण्याच्या पद्धति दिल्या आहेत. अशा समीकाराव्यतिरिक्त इतर समीकार सोडवितांना उपयोगांत आणाऱ्या लागणान्या विविध कृत्त्या खालील उदाहरणांवरून निदर्शनास येतील.

उदाहरण १—

सोडवा.

$$य^२ + यर + र^२ = २१ \dots\dots\dots(१)$$

$$य + \sqrt{यर} + र = ७ \dots\dots\dots(२)$$

$$\text{आता } य^२ + र^२ + यर = (य + र)^२ - यर \\ = (य + र - \sqrt{यर}) (य + र + \sqrt{यर})$$

(१) आणि (२) चा उपयोग करून

$$२१ = (य + र - \sqrt{यर}) ७$$

$$\text{म्हणून } य + र - \sqrt{यर} = ३ \dots\dots\dots(३)$$

(२) आणि (३) यांचा उपयोग करून

$$२य + २र = १०$$

$$\text{किंवा } य + र = ५ \dots\dots\dots(४)$$

(४) चा (२) मध्ये उपयोग करून आणि वर्ग करून

$$यर = ४ \dots\dots\dots(५)$$

(४) आणि (५) हे समीकार सोडवून

$$य = १, \quad र = ४; \quad \text{आणि } य = ४, \quad र = १$$

उदाहरण २—

$$(य + र)^३ + ६(य - र)^३ = ५(य^२ - र^२)^३ \dots\dots(१)$$

$$१३य + १८र = ७२ \dots\dots\dots(२)$$

[मद्रास १९००]

(१) या समीकारास $(y-r)^{\frac{3}{2}}$ ने भागा म्हणजे

$$\left(\frac{y+r}{y-r}\right)^{\frac{3}{2}} + 6 = 9 \left(\frac{y+r}{y-r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

या समीकारांत $\left(\frac{y+r}{y-r}\right)^{\frac{3}{2}} = l$ ठेवा.

या आदेशामुळे रूपांतरित समीकार

$$l^2 + 6 = 9l$$

$$\text{किंवा } l^2 - 9l + 6 = 0$$

$$\text{किंवा } (l-3)(l-2) = 0$$

$$\text{अर्थात् } l = 2 \text{ किंवा } l = 3$$

$$\text{म्हणून } \frac{y+r}{y-r} = 2 \text{ किंवा } 3$$

$$(2) \quad \frac{y+r}{y-r} = 2 \text{ च्या}$$

$$\text{म्हणून } 9y - 9r = 0$$

$$\text{किंवा } 9r = 9y$$

$$9r = 9y \text{ ही र ची मदीं (२) मध्ये ठेवून}$$

$$13y + 18y = 32$$

$$\text{म्हणून } y = \frac{32}{31} \text{ आणि } r = \frac{32}{31}$$

$$\text{इष्ट मूळें } y = 2\frac{2}{3} \text{ आणि } r = 2\frac{2}{3}$$

$$(आ) \quad \frac{y+r}{y-r} = 27$$

$$\text{म्हणून } 26y - 26r = 0$$

$$\text{किंवा } 13y = 13r$$

र ची ही अर्हा (२) मध्ये ठेवून

$$13r + 16r = 62$$

$$\text{किंवा } r = \frac{2}{3}$$

$$\text{आणि } y = \frac{1}{3}$$

$$\text{इष्ट मूळें } y = 2\frac{1}{3}, \quad r = 2\frac{1}{3}$$

उदाहरण ३—

$$\frac{y^3 + r^3}{(y+r)^2} + \frac{y^3 - r^3}{(y-r)^2} = \frac{43y}{6} \dots\dots\dots (१)$$

$$4y - 13r = 2 \dots\dots\dots (२)$$

आता

$$y^3 + r^3 \equiv (y+r)^3 - 3yr(y+r)$$

$$y^3 - r^3 \equiv (y-r)^3 + 3yr(y-r)$$

या पेक्षाभ्यांचा उपयोग करून समीकार (१) चे रूपांतर

$$y+r \left\{ \frac{3yr}{y+r} + y-r + \frac{3yr}{y-r} \right\} = \frac{43y}{6}$$

$$3yr \left[\frac{1}{y-r} - \frac{1}{y+r} \right] = \frac{43y}{6} - 2y$$

$$\text{म्हणून } \frac{३य२ \times २२}{य२ - २२} = \frac{२७य}{८}$$

$$\text{यावरून } य=० \text{ किंवा } \frac{२२२}{य२ - २२} = \frac{९}{८}$$

$$\text{म्हणून } १६२ = ९(य२ - २२)$$

$$२५२ = ९य२$$

$$\text{म्हणून } २ = \pm \frac{३}{५} य$$

$$(अ) \text{ समीकार (२) वरून, } य=० \text{ तर } २ = -\frac{४}{७}$$

$$(आ) २ = \frac{३}{५} य$$

$$\text{तर } ५ य - ७ \times \frac{३}{५} य = ४$$

$$\text{म्हणून } य=५ \quad \text{म्हणून } २=३$$

$$(इ) २ = १ - \frac{३}{५} य$$

$$\text{तर } ५ य + ७ \times \frac{३}{५} य = ४$$

$$२५ य + २१ य = २०$$

$$४६ य = २०$$

$$\text{गृह्यून } y = \frac{10}{23}$$

$$\text{गृह्यून } r = \frac{-6}{23}$$

समीकाराचीं इष्ट मूळें—

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ r=\frac{-8}{9} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y=4 \\ r=3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y=\frac{10}{23} \\ r=\frac{-6}{23} \end{array}$$

प्रश्नसंग्रह १२

खालील समीकार सोडवा.

- (१) $y + r = 3$
 $2y^2 - 4yr + 2r^2 = 0$ [फलकत्ता १९२०]
- (२) $4y + 2r = 12$
 $2y^2 + 3yr + r^2 = 14$ [फलकत्ता १८८८]
- (३) $3y + 4r = 4$
 $y^2 + r^2 = 1$ [फलकत्ता १९२२]
- (४) $2y + 3r + 8 = 0$
 $2y^2 - 3yr + 4r^2 = 24$ [मॅथ्स १९१७]

$$\text{म्हणून } \frac{3y^2 \times 2r}{y^2 - r^2} = \frac{20y}{4}$$

$$\text{यावरून } y=0 \text{ किंवा } \frac{2r^2}{y^2 - r^2} = \frac{9}{4}$$

$$\text{म्हणून } 16r^2 = 9(y^2 - r^2)$$

$$25r^2 = 9y^2$$

$$\text{म्हणून } r = \pm \frac{3}{5}y$$

$$(अ) \text{ समीकार (२) वरून, } y=0 \text{ तर } r = -\frac{8}{9}$$

$$(आ) r = \frac{3}{5}y$$

$$\text{तर } 4y - 9 \times \frac{3}{5}y = 8$$

$$\text{म्हणून } y=4 \quad \text{म्हणून } r=3$$

$$(इ) r = 1 - \frac{3}{5}y$$

$$\text{तर } 4y + 9 \times \frac{3}{5}y = 8$$

$$24y + 27y = 20$$

$$44y = 20$$

$$\text{अदणून य} = \frac{10}{23}$$

$$\text{अदणून र} = \frac{-6}{23}$$

समीकाराचीं द्वय मूळें—

$$\left. \begin{array}{l} \text{य} = 0 \\ \text{र} = \frac{-6}{23} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{य} = 4 \\ \text{र} = 3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{य} = \frac{10}{23} \\ \text{र} = \frac{-6}{23} \end{array}$$

प्रदलसंग्रह १२

न्यालील समीकार सोडवा.

- (१) $\text{य} + \text{र} = 3$
 $2\text{य}^2 - 4\text{यर} + 2\text{र}^2 = 0$ [फलकत्ता १०२०]
- (२) $4\text{य} + 2\text{र} = 12$
 $2\text{य}^2 + 3\text{यर} + \text{र}^2 = 14$ [फलकत्ता १८८८]
- (३) $3\text{य} + 4\text{र} = 4$
 $\text{य}^2 + \text{र}^2 = 1$ [फलकत्ता १०२२]
- (४) $2\text{य} + 3\text{र} + 8 = 0$
 $2\text{य}^2 - 3\text{यर} + 4\text{र}^2 = 24$ [फलकत्ता १२१७]

$$(५) \quad y^2 + r^2 + y - r = 22$$

$$y + r = 6$$

[अलाहाबाद १९१०]

$$(६) \quad \frac{y}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

$$y + r = 2$$

[कलकत्ता १९३६]

$$(७) \quad y + r = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{r} = 1$$

[कलकत्ता १९३७]

$$(८) \quad \sqrt{y} + \sqrt{r} = \frac{3}{2}$$

$$y + r = 10$$

[कलकत्ता १९३८]

$$(९) \quad yr + y + r = 29$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

[कलकत्ता १९३९]

$$(१०) \quad y + r + \sqrt{(y+2)(r+3)} = 38$$

$$(y+2)^2 + (r+3)^2 + (y+2)(r+3) = 641$$

[अलाहाबाद १९२८]

$$(११) \quad \frac{y^2}{r} + \frac{r^2}{y} = 14$$

$$y + r = 12$$

[कलकत्ता १९१९]

$$(१२) \quad 2y^2 + 3yr + r^2 = 20$$

$$4y^2 + 8r^2 = 81$$

[कलकत्ता १८९२]

$$(१३) \quad y^2 + r^2 + १७ = ५५५$$

$$२५^2 + ३२^2 = ३५$$

[मद्रास १८२२]

$$(१४) \quad ४५^2 - ५५५ + ५ = १६$$

$$३५^2 - २५५ + ५ = ८$$

[पंजाब १९१०]

$$(१५) \quad ४५^2 + ३५५ + १८५ = २०$$

$$४५^2 + ५५ = १०$$

[मद्रास १८९७]

$$(१६) \quad y^2 + y^2 r^2 + r^2 = १३३$$

$$y^2 - ५५५ + r^2 = ७$$

[अलाहाबाद १९०९]

$$(१७) \quad ६५^2 - ५५५ - ६५^2 + ३५ + ३५ = ०$$

$$१०५^2 - ९५५ + २५^2 - ९५ - ५५ - ७ = ०$$

[अलाहाबाद १९२६]

$$(१८) \quad y - r = २$$

$$y^2 + r^2 = ८२$$

$$(१९) \quad y + r = ६$$

$$y^2 + r^2 = ६२६$$

$$(२०) \quad y - r = २; \quad y^2 - r^2 = २४२$$

$$(२१) \quad y^2 - r^2 = २१८; \quad y - r = २$$

[कलकत्ता १९१७]

$$(२२) \quad y + \frac{४}{r} = १; \quad r \times \frac{४}{y} = २५$$

[कलकत्ता १९२०]

$$(२३) \quad y + ५५ = ३; \quad r + ५५ = ४$$

[कलकत्ता १९२१]

$$(२४) \quad y + r + ३ \sqrt{y + r} = y^2 + r^2 = १०$$

[नागपुर १९२५]

आणि क ची -१ ही अर्धा घेतल्यास

$$य = -१, \quad र = -१ \quad \text{आणि} \quad ल = -२$$

८.६२ उदाहरण २— सोडवा—

$$य + र + ल = ६ \quad \dots\dots\dots (१)$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = १४ \quad \dots\dots\dots (२)$$

$$रल = ६ \quad \dots\dots\dots (३)$$

(२) आणि (३) या समीकरांवरून

$$य^२ + र^२ + ल^२ + २रल = १४ + १२$$

$$\text{म्हणून } य^२ + (र + ल)^२ = २६ \quad \dots\dots\dots (४)$$

आता $(र + ल) = ६$ ठेवा म्हणजे

(१) आणि (४) या समीकरांचे रूपांतर

$$य + ६ = ६$$

$$\text{आणि } य^२ + ६ = २६$$

$$\text{आता } य^२ + ६ = (य + ६)^२ - १२य$$

$$\text{म्हणून } २६ = ३६ - १२य$$

$$\text{म्हणून } १२य = १०$$

$$\text{पुन्हा } (य - ६)^२ = (य + ६)^२ - ४२य$$

$$= ३६ - १०$$

$$= १६$$

$$\text{म्हणून } य - ६ = \pm ४$$

आता $य + ६ = ६$ आणि $य - ६ = +४$ हे समीकार
सोडवा.

$$\text{म्हणून } y = 4 \text{ आणि } x = 1$$

पुन्हा समीकार (१) मध्ये y च्या अर्हेचा आदेश करून

$$x + y = 5 - 4$$

$$= 1$$

$$\text{आता } x + y = 1$$

$$\text{आणि } xy = 4 \text{ (समीकार ३)}$$

$$\text{म्हणून } (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$= 1 - 16$$

$$= -15$$

$$\therefore x - y = \pm \sqrt{-15}$$

हा समीकार $x + y = 1$ या समीकाराच्या साहाय्याने सोडवून

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}, \quad y = \frac{1 \mp \sqrt{-15}}{2}$$

$$(ब) \text{ आता } x + y = 5$$

$$\text{आणि } x - y = -3$$

हे समीकार सोडवा

$$\text{म्हणजे } x = 1 \text{ आणि } y = 4$$

y ची ही अर्हा समीकार (१) मध्ये ठेवून

$$x + y = 5$$

$$\text{आता } x + y = 5$$

$$\text{आणि } xy = 4 \text{ (समीकार ३)}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून } (r-l)^2 &= (r+l)^2 - 4rl \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$r-l = \pm 1$$

$$\text{पण } r+l = 5$$

$$\text{म्हणून } r-l = 1 \text{ घेतल्यास}$$

$$r=3 \text{ आणि } l=2$$

$$\text{आणि } r-l = -1 \text{ घेतल्यास}$$

$$r=2 \text{ आणि } l=3,$$

$$\text{म्हणून इष्ट मूलें } y=1 \quad r=3 \quad l=2$$

$$y=1 \quad r=2 \quad l=3$$

$$y=4, r = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}, \quad l = \frac{1 \mp \sqrt{-23}}{2}$$

८.७ उदाहरण १— सोडवा—

$$y^2 + yr + yl = 4$$

$$r^2 + rl + ry = 64$$

$$l^2 + ly + lr = -36$$

दिलेले समीकार खालील रूपांत लिहितां येतात.

$$y(y+r+l) = 4 \quad \dots\dots\dots(१)$$

$$r(y+r+l) = 64 \quad \dots\dots\dots(२)$$

$$l(y+r+l) = -36 \quad \dots\dots\dots(३)$$

तिन्ही समीकारांचा योग करून

$$(य + र + ल)^2 = ३६$$

म्हणून $(य + र + ल) = \pm ६$

आता $(य + र + ल) = ६$ घेतल्यास क्रमशः समीकार (१), (२) आणि (३) वरून

$$य = \frac{४}{३}, \quad र = \frac{३२}{३}, \quad ल = -६$$

आणि $य + र + ल = -६$ घेतल्यास क्रमशः समीकार (१), (२), आणि (३) वरून

$$य = -\frac{४}{३}$$

$$र = -\frac{३२}{३}$$

$$ल = ६$$

घर सोडविलेलें उदाहरण खालील उदाहरणाचा विशिष्ट प्रकार आहे.

$$य (टय + ठर + डल) = त \dots\dots\dots (१)$$

$$र (टय + ठर + डल) = थ \dots\dots\dots (२)$$

$$ल (टय + ठर + डल) = द \dots\dots\dots (३)$$

(१), (२) आणि (३) या समीकारांना क्रमशः ट, ठ आणि ड यांनी गुणा आणि नंतर त्यांचा योग करा.

म्हणजे $(टय + ठर + डल)^2 = टत + ठथ + डद$

$$\text{किंवा } टय + ठर + डल = \pm \sqrt{टत + ठथ + डद}$$

ह्या समीकारच्या वायव्य पक्षाचो धन अर्हो क्रमशः (१),
(२) आणि (३) या समीकारांत ठेवल्यास

$$य = \frac{त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = \frac{थ}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$ल = \frac{द}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

तसेंच टय + ठर + डल ची जाण अर्हो क्रमशः (१), (२)
आणि (३) या समीकारांत ठेवल्यास

$$य = \frac{-त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = \frac{-थ}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$ल = \frac{-द}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

८.७१ उदाहरण २— सोड्या—

$$(र - ल)(ल + य) = २२ \dots\dots\dots (१)$$

$$(ल-य) (य-र) = ३३ \dots\dots\dots(२)$$

$$(य-र) (र-ल) = ६ \dots\dots\dots(३)$$

तिन्ही समीकारांचा गुणाकार करून

$$(य-र)^२ (र-ल)^२ (ल+य)^२ = २२ \times ३३ \times ६$$

$$\text{किंवा } (य-र) (र-ल) (ल+य) = \pm ६६ \dots\dots\dots (४)$$

समीकार (४) ला क्रमशः (१), (२), (३) या समीकारांनी भागून

$$य-र = \pm ३$$

$$र-ल = \pm २$$

$$ल+य = \pm ११$$

$$\text{धाता (क) } य-र = ३$$

$$र-ल = २$$

$$ल+य = ११$$

$$\text{आणि (ख) } य-र = -३$$

$$र-ल = २$$

$$ल+य = -११$$

हे युगपत् समीकार सोडवावयाचे आहेत.

(क) या समीकारांची इष्ट मूळे

$$य = ८, र = ५, ल = ३$$

(ख) या समीकारांची इष्ट मूळे

$$य = -८, र = -५, ल = -३$$

८.७२ उदाहरण ३— सोडवा—

$$य^२ - रल = १ \dots\dots\dots(१)$$

$$र^२ - यल = ३ \dots\dots\dots(२)$$

$$ल^२ - यर = -१ \dots\dots\dots(३)$$

(१), (२), आणि (३) या समीकारांना क्रमशः र, ल आणि य यांनी गुणून नंतर त्यांचा योग करा.

$$\text{म्हणजे } ५र + ३ल - य = ० \dots\dots\dots(४)$$

आता (१), (२) आणि (३) या समीकारांना क्रमशः ल, य, आणि र यांनी गुणून नंतर त्यांचा योग करा म्हणजे

$$५ ल + ३र - र = ० \dots\dots\dots(५)$$

आता (४) आणि (५) या समीकारांची योग्य पुनर्रचना केल्यास

$$य - ५र - ३ल = ०$$

$$३य - र + ५ल = ०$$

आता, तिर्यक् गुणनाने

$$\frac{य}{-२} = \frac{र}{-१} = \frac{५ल}{१} = क$$

$$\text{म्हणून } य = -२क$$

$$र = -क$$

$$ल = क$$

दिलेल्या समीकारांपैकी कोणत्याही एकांत य, र आणि

$$४ र^२ + ल^२ - २रल = १३ \dots\dots\dots (६)$$

$$७ र^२ + ल^२ - ५रल = १९ \dots\dots\dots (७)$$

आता $र = फ \times ल$ ठेवून (६) ला (७) ने भागा

$$\therefore \frac{४फ^२ + १ - २फ}{७फ^२ + १ - ५फ} = \frac{१३}{१९}$$

$$\text{म्हणून } ५फ^२ - ९फ - २ = ०$$

$$\text{म्हणून } फ = २ \text{ किंवा } फ = -\frac{१}{५}$$

आता $फ = २$ घ्या म्हणजे

$$र = २ ल$$

र ची ही अर्धा (६) मध्ये ठेवून

$$ल = \pm १$$

$$\therefore \text{म्हणून } र = \pm २$$

$$\text{आणि } य = \pm ३$$

$$\text{आता, } फ = -\frac{१}{५} \text{ घेतल्यास}$$

$$ल = \pm \frac{५}{\sqrt{३}}$$

$$र = \mp \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\text{आणि } य = \mp \frac{७}{\sqrt{३}}$$

म्हणून $y = 3$	$r = 2$	$l = 1$
$y = -3$	$r = -2$	$l = -1$
$y = -\frac{7}{\sqrt{3}}$	$r = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$l = \frac{4}{\sqrt{3}}$
$y = \frac{7}{\sqrt{3}}$	$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$l = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

८.८ उदाहरण— सोडवा—

$$y + r + l = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + r^2 + l^2 = 18 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$y^3 + r^3 + l^3 = 20 \quad \dots\dots\dots (3)$$

[मल्लाहायाद १९२६]

समीकार (१) चा वर्ग करून त्यांतून समीकार (२) उणें करा. म्हणजे

$$y^2 + r^2 + l^2 = -4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

आता $y^3 + r^3 + l^3 - 3yrl$

$$= (y + r + l)(y^2 + r^2 + l^2 - yr - rl - ly)$$

(१), (२), (३) आणि (४) यांचा वरील समीकारांत

उपयोग करून

$$20 - 3yrl = 2(18 + 4)$$

$$\text{म्हणून } 3yrl = -16$$

$$\text{किंवा } yrl = -\frac{16}{3}$$

$$\text{आता, } y + r + l = 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(३) \quad य + र + ल = ९$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = २९$$

$$यर = ६$$

$$(४) \quad य + र + ल = ६$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = १४$$

$$रल = ६$$

[पाटणा १९३९]

$$(५) \quad य + र + ल = १\frac{१}{३}$$

$$यर + यल + रल = \frac{९}{२४}$$

$$यरल = \frac{१}{२४}$$

[भलाहाबाद १९२५]

$$(६) \quad य^२ + यर + यल = ६$$

$$र^२ + रल + रय = १२$$

$$ल^२ + लय + लर = १८$$

$$(७) \quad रल - र + ल = ५$$

$$लय + ल - य = १०$$

$$यर + य + र = २५$$

$$(८) \quad यर + य + र = २३$$

$$यल + य + ल = ४१$$

$$रल + र + ल = २७$$

$$(९) \quad यर + ५ (य + र) = ३७$$

[नागपूर १९४१]

[नागपूर १९२५]

$$ल^2 - यर = १$$

[नागपूर १९३९]

$$(१७) य^2 - रल = त$$

$$र^2 - लय = थ$$

$$ल^2 - यर = द$$

$$(१८) य(र+ल) = ५$$

$$र(य+ल) = ८$$

$$ल(य+र) = ९$$

[कलकत्ता १९३८]

$$(१९) \text{ जर } \frac{य}{ख+ग-क} = \frac{र}{ग+क-ख} = \frac{ल}{क+ख-ग}$$

$$\text{तर } (क+ख+ग)(रल+लय+यर) \\ = (य+र+ल)(फय+खर+गल)$$

हैं सिद्ध करा.

[पाटणा १९३९]

$$(२०) यल+र=७ल$$

$$रल+य=८ल$$

$$य+र+ल=१२$$

[कलकत्ता १९३९]

$$(२१) य+र+ल=०$$

$$य^2 + र^2 + ल^2 = १४$$

$$य^3 + र^3 + ल^3 = -१८$$

[अलाहाबाद १९२४]

$$(२२) य+र+ल=६$$

$$य^2 + र^2 + ल^2 = १४$$

$$य^3 + र^3 + ल^3 = ३६$$

[नागपूर १९३८]

प्रकरण नव्वें

क्रमचय आणि संचय

(permutation and combination)

१.१ जी वस्तु मोजता येते ती अंकाणिती किंवा योजीय अनुसंधानाचा (investigation) विषय होऊं शकत. वस्तूंचें प्रचरण (selection) आणि विन्यास (arrangements) हाहि अशाचैपकी एक विषय आहे.

ज्या क्रियांत निवडींचा प्रदन असतो किंवा पर्यायांचें (alternatives) संयोजन (combination) करण्याचा संभव (chance) असतो त्यांना या विषयाचे नियम लागू होतात.

क, ख, ग या तीन अक्षरांपैकी कोणत्याहि दोन अक्षरांची निवड करा.

आता, (क, ख), (ख, ग) आणि (ग, क) यांची तीन प्रकारें निवड करता येते म्हणून अशा निवडींचे प्रकार तीन आहेत. यांपैकी एका प्रकारें निवडलेल्या अक्षरांचे परस्परांत निर-निराळे किती विन्यास होऊं शकतात ते आपण पाहूं.

(क, ख) हा समूह घ्या. क आणि ख ह्या दोन अक्षरांचा विन्यास (क, ख) किंवा (ख, क) अशाप्रकारें होतो. याप्रमाणे

कें आणि ख या दोन घणांचा दोन प्रकार विन्यास करितां येतो.

जेव्हा वस्तूच्या रचनेचा आपण विचार करतो तेव्हा त्यांच्या विन्यासाचा जो क्रम असतो त्याला अत्यंत महत्त्व असतें ही गोष्ट लक्षांत ठेवली पाहिजे. परंतु वस्तूच्या केवळ प्रवरणाचाच (selection) जेव्हा प्रश्न असतो तेव्हा त्यांचा क्रम विचारांत घेण्याची मुळीच आवश्यकता नसत.

कख हा समूह निवडतांना प्रथम क नंतर ख किंवा प्रथम ख नंतर क निवडला तरी त्यांतून प्रवरणाचा एकच प्रकार निष्पन्न होतो. त्याचा (कख) किंवा (खक) ने निर्देश केला जातो.

वस्तूचे प्रवरण आणि विन्यास ह्यांना गणित विषयांत अनुक्रम संचय (combination) आणि क्रमचय (permutation) असे म्हणतात.

दिलेल्या वस्तूंपैकी सर्व अथवा कांही वस्तूंचे प्रवरण अथवा समूह यांना संचय असे म्हणतात आणि प्रत्येक संचयांतील वस्तूंच्या विन्यासाला त्यांचा क्रमचय म्हणतात.

१.२ महत्त्वपूर्ण विधान—

एखादी क्रिया जर म प्रकारांनी करतां येत असेल आणि ही, यांपैकी एखाद्या प्रकाराने केल्यानंतर जर दुसरी क्रिया न प्रकारांनी करतां येत असेल तर दोन्ही क्रिया करण्याचे संभाव्य प्रकार $m \times n$ असतात.

समजा पहिली क्रिया कोणत्याहि एका प्रकाराने केली तर त्यानंतर दुसरी क्रिया न प्रकारांनी करता येते.

म्हणून पहिली क्रिया करण्याच्या प्रत्येक प्रकारानंतर दुसरी क्रिया करण्याचे न प्रकार आहेत. पण पहिली क्रिया म प्रकारांनी केली जाते म्हणून दोन्ही क्रिया करण्याचे संभाव्य प्रकार $m \times n$ आहेत.

उदाहरण— २ पारितोषिके ८ प्रतिस्पर्ध्यांना किती प्रकारांनी देतां येतील ?

पहिले पारितोषिक ८ जणांपैकी कोणत्याहि एकाला देतां येतें म्हणजेच पहिले पारितोषिक देण्याचे ८ प्रकार संभवतात.

पण कोणाहि एकाला पहिले पारितोषिक दिल्यानंतर दुसरे पारितोषिक उरलेल्या ७ जणांपैकी कोणाहि एकाला देतां येतें. म्हणजेच दुसरे पारितोषिक देण्याचे प्रकार ७ आहेत.

आता पहिले पारितोषिक देण्याच्या प्रत्येक प्रकाराकरिता दुसरे पारितोषिक देण्याचे ७ प्रकार संभवतात.

पण पहिले पारितोषिक देण्याचे ८ प्रकार आहेत. म्हणून दोन्ही पारितोषिके देण्याच संभाव्य प्रकार

$$8 \times 7 = 56$$

१२३. स विज्ञातीय वस्तुपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तु घेतल्यास क्रमचर्याची संख्या काढणे.

हाच प्रश्न अन्यथा पुढीलप्रमाणे मांडतां येईल.

न रिकाम्या जागा स विज्ञातीय वस्तूंनी किती प्रकारांनी भरतां येतील ?

पहिली जागा भरण्याकरिता हानाशी (at our disposal) स वस्तू आहेत. म्हणून ती जागा स प्रकारांनी

भरतां येते. यांपैकी कोणत्याहि एका प्रकाराने ती जागा भरल्यानंतर दुसरी जागा भरण्याकरितां हाताशी (स-१) चस्तू आहेत. म्हणून ती जागा (स-१) प्रकारांनी भरतां येते.

पहिली जागा भरून काढण्याच्या प्रत्येक प्रकाराकरितां दुसरी जागा भरून काढण्याचे (स-१) प्रकार आहेत. पण पहिली जागा भरून काढण्याचे स प्रकार आहेत. म्हणून पहिल्या दोन जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार स(स-१) आहेत.

पुन्हा, पहिल्या दोन जागा कोणत्याहि एका प्रकाराने भरल्यानंतर तिसरी जागा भरण्याकरिता हाताशी (स-२) घेवू लागू. म्हणून ती जागा (स-२) प्रकारांनी भरता येते. पूर्ववत् चर्चा करून, पहिल्या तीन जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार स (स-१) (स-२) आहेत.

यावरून प्रत्येक घेठो ग्रंथवाची संख्या भरलेल्या जागांच्या संख्येसमान असते आणि प्रत्येक अवयव त्याच्या पूर्वगामी अवयवांपेक्षा एक ने कमी असतो हे दिसून येते. म्हणून न रिकाम्या जागा भरून काढण्याचे एकंदर प्रकार

$$\begin{aligned} & \text{स (स-१) (स-२) } \dots \dots \dots \text{ न, अवयवांपर्यंत } \\ & = \text{स (स-१) (स-२) } \dots \dots \dots [\text{स-(न-१)}] \\ & = \text{स (स-१) (स-२) } \dots \dots \dots (\text{स-न+१}) \end{aligned}$$

म्हणून स विजातीय वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेतल्यास क्रमचरांची संख्या स(स-१) (स-२)..... (स-न+१) येते. स पैकी सर्वज्या सर्वच वस्तूंज्या

क्रमचयांची संख्या स (स-१) (स-२).....(स-न+१)..
स अवयवांपर्यंत किंवा स (स-१) (स-२)..... ३×२×१

आहे. हा गुणाकार सदैव स किंवा स ! असा दर्शविला जातो. आणि याला हत (factorial) स असे संबोधतात.

१.३१ स वस्तूंपैकी न वस्तू घेऊन येणाऱ्या क्रमचयाच्या संख्येचे सक्रन ने अभिव्यक्त करतात.

$$\text{सहणून सक्रन} = स (स-१) (स-२) .. (स-न+१)$$

$$\text{, आणि सक्रन} = स (स-१) (स-२) ३ \times २ \times १$$

$$= \underline{\underline{स}}$$

संख्यात्मक प्रश्न सोडवितांना सक्रन मधील स ने दिलेल्या वस्तूंचा आणि न या पादांकाने घेतलेल्या वस्तूंचा किंवा सक्रन या सूत्रांत असलेल्या अवयवांचा बोध होतो.

उदाहरण १— १, २, ३,.....९ ह्या पहिल्या नऊ प्राकृतिक अंकांपैकी कोणतेहि चार घेऊन निरनिराळ्या किती संख्या निर्माण होतात ते काढा.

१. वस्तूंपैकी प्रत्येकवेळा चार निवडून त्यांचा विन्यास करण्याचे किती संभाव्य प्रकार आहेत हे काढावयाचे आहे.

$$\begin{aligned} \text{इष्ट फल} &= {}^9P_4 \\ &= ९ \times ८ \times ७ \times ६ \\ &= ३०२४ \end{aligned}$$

उदाहरण २— 'परदेशगमन' या शब्दांतील अक्षरांच्या साह्या ने किती भिन्न शब्द निर्माण होतात ?

यांत ७ भिन्न अक्षरे आहेत. आणि ह्या सात अक्षरांच्या विन्यासाचे किती भिन्न प्रकार आहेत हें आपल्याला काढावयाचें आहे.

$$\text{इष्ट फल} = {}^n\text{क्र.}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 5040$$

९.४ स विजातीय वस्तूपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेऊन येणाऱ्या संचयांची संख्या काढणें.

स वस्तूपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू घेऊन येणाऱ्या संचयाच्या संख्येचें संचन ने अभिधान करा.

आतां प्रत्येक संचयांत न वस्तू असून त्या वस्तूंचा आपसांत विन्यास केव्हास त्याचे ${}^n\text{क्र.}$ प्रकार होतात. पण एकंदर संचयाचे प्रकार संचन आहेत. म्हणून विन्यासाचे एकंदर प्रकार संचन \times ${}^n\text{क्र.}$ आहेत. परंतु अन्य रीतीने स वस्तूपैकी प्रत्येकवेळीं न वस्तू घेतल्यास क्रमचयांची संख्या ${}^s\text{क्र.}$ आहे.

$$\therefore \text{संचन} \times {}^n\text{क्र.} = {}^s\text{क्र.}$$

$$\text{पण } {}^s\text{क्र.} = s(s-1)(s-2)\dots\dots(s-n+1)$$

$${}^n\text{क्र.} = n(n-1)(n-2)\dots\dots 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{म्हणून संचन} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots\dots(s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots\dots (n-1) \times n}$$

अंतिम फल दिसण्यांत मित्रासारखे असले तरी परि-
भाषेवरून, ते मित्र नसून पूर्णांक आहे हे स्पष्ट आहे.

१.४१ सच_n ची प्राप्त अर्हा अन्य स्वरूपांत लिहितां
येते ती अशी—

$$\text{सच}_n = \frac{\text{स}(\text{स}-१)(\text{स}-२) \dots (\text{स}-n+१)}{१ \times २ \times ३ \dots n} \dots (१)$$

दक्षिण पक्षाच्या अंशाला आणि हराला [(स-n) ने
गुणा म्हणजे

$$\begin{aligned} \text{सच}_n &= \frac{\text{स}(\text{स}-१)(\text{स}-२) \dots (\text{स}-n+१) | \text{स}-n}{१ \times २ \times ३ \dots n \times | \text{स}-n} \\ &= \frac{\text{स}}{|n| | \text{स}-n}} \dots \dots \dots (२) \end{aligned}$$

सामान्यतः, सच_n च्या अर्हेचें रूप, (२) मध्ये दिल्याप्रमाणे,
लिहिण्याची पद्धत आहे.

|० चा अर्थ.

जर काढलेल्या सच_n च्या दुसऱ्या रूपांत n = स घेतल्यास

$$\text{सच}_s = \frac{\text{स}}{\text{स} | 0} = \frac{१}{| 0}$$

पण संचय म्हणजे, स वस्तूंपैकी सगळ्याच वस्तूंचा, संचय करणे होय.

म्हणून $\text{संचय} = 1$

$$\text{म्हणून } 1 = \frac{1}{10}$$

यावरून 10 ची अर्हा एक आहे असे समजावे लागते.

९.४२ खालील संयथांचे मनन करा.

$$\underline{16} = 16 \times 15 \underline{12}$$

$$\underline{10} = \frac{\underline{16}}{16 \times 15 \times \dots \times 11}$$

$$\underline{n} = n(n-1) \underline{n-2}$$

$$= n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-t) \underline{n-t-1}$$

९.४३ खालील सूत्रे अत्यंत महत्वाची आहेत.

$$(1) \text{सचन} = \text{सचस-न}$$

$$(2) \text{सचन} + \text{सचन-1} = \text{स+1चन}$$

(३) ची सिद्धता

$$\begin{aligned} (९.४१) \text{ वरून सचस-} &= \frac{\text{स}}{\text{स-न} \quad \text{स-(स-न)}} \\ &= \frac{\text{स}}{\text{स-न} \quad \text{न}} \\ &= \text{सचन} \end{aligned}$$

सचन = सचन-न हें फल शब्दांत पुढीलप्रमाणे व्यक्त करतां येतें.

स वस्तूपैकी प्रत्येक वेळीं न वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयांची संख्या त्या स वस्तूपैकी (स-न) वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयांच्या संख्येसमान असते. अशा संचयांना संपूरकसंचय म्हणतात.

वरील फल अन्य रीतीनेहि काढतां येतें. ती रीत अशी—

सचन म्हणजे स वस्तूपैकी न वस्तूंची निवड करण्याचे सर्व संभाव्य प्रकार.

आता प्रत्येक प्रकार न वस्तू निवडल्या म्हणजे अवशिष्ट (स-न) वस्तूंचा आपोआपच एक समूह निर्माण होतो.

म्हणून स वस्तूपैकी न वस्तू निवडून होणाऱ्या संचयांची संख्या स वस्तूपैकी (स-न) वस्तू निवडून येणाऱ्या संचयांच्या संख्येसमान असते. अर्थात्

$$\text{सचन} = \text{सचन}-1$$

(२) ची सिद्धता—

$$\text{सचन} = \text{सचन}-1$$

$$= \frac{1 \times 1}{1 \times (1-1)} = \frac{1 \times 1}{1-1} = \frac{1 \times 1}{1-1+1}$$

$$= \frac{s}{n-1} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{s-n+1} \right]$$

$$= \frac{s}{n-1} \times \frac{(s-n+1+n)}{n(s-n+1)}$$

$$= \frac{(s+1)s}{n(n-1)(s-n+1)}$$

$$= \frac{s+1}{n} \cdot \frac{s+1-n}{s-n+1}$$

$$= s+1$$

उदाहरण १— ${}^{15}C_3$ की शर्ही काढा.

आता $sC_n = sC_{s-n}$

म्हणून ${}^{15}C_3 = {}^{15}C_{15-3}$

$$= {}^{15}C_2$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 105$$

उदाहरण २— ८ माणसांपैकी कोणतीही ३ निवडावयाची आहेत. तर किती प्रकारे निवड करता येईल?

या प्रवरणांत एक विशिष्ट माणूस निवडलाच जात असेल तर प्रवरणाचे संभाव्य प्रकार किती?

८ माणसांपैकी ३ माणसे निवडावयाची आहेत. त्यांचे संभाव्य प्रकार 'च',

∴ इष्ट प्रकार = 'च'.

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

आता तीन माणसे निवडताना एक विशिष्ट माणूस प्रत्येक वेळी असतोच म्हणजेच उर्वरित ७ माणसांतून दोघांची निवड करावयाची आहे.

त्याचे इष्ट प्रकार = 'च',

$$= 21$$

या २१ प्रकारांत एक विशिष्ट माणूस नेहमी निवडला जाईल.

उदाहरण ३—

८ पुरुष आणि ५ स्त्रिया यांच्यापैकी ७ जणांची एक समिति निर्माण करावयाची असल्यास

(१) स्त्रियांपैकी केवळ ३ च स्त्रिया किंवा (२) स्त्रियांपैकी कमीत कमी ३ स्त्रिया निवडल्यास प्रत्येक वेळेस निवडणुकीचे प्रकार किती ते काढा.

(१) ५ स्त्रियांपैकी केवळ ३ च स्त्रिया निवडण्याचे प्रकार = 'च', समितीतील इतर चार सदस्य ८ पुरुषां-

मधून निवडावयाचे आहेत. म्हणून त्याचे प्रकार
 $= {}^4C_4$ म्हणून निवडणुकीचे एकंदर प्रकार
 $= {}^4C_3 \times {}^4C_4$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 600$$

(२) समितीत कमीत कमी ३ स्त्रिया असाव्यास पाहिजेत.
 म्हणजे ३ किंवा ४ किंवा ५ हि स्त्रिया त्या समितीत
 राहू शकतील.

प्रथम समजा ३ स्त्रिया निवडल्या तर ४ पुरुष निवडले
 जातील. म्हणून निवडणुकीचे प्रकार ${}^4C_3 \times {}^4C_4$
 दुसऱ्यांदा समजा ४ स्त्रिया निवडल्या तर ३ पुरुष
 निवडले जातील. म्हणून निवडणुकीचे प्रकार
 ${}^4C_4 \times {}^4C_3$

तिसऱ्यांदा समजा ५ स्त्रिया घेतल्या तर २ पुरुष
 निवडले जातील. म्हणून निवडणुकीचे प्रकार
 ${}^4C_4 \times {}^4C_2$

∴ एकंदर प्रकार

$$= {}^4C_3 \times {}^4C_4 + {}^4C_4 \times {}^4C_3 + {}^4C_4 \times {}^4C_2$$

$$= 600 + 240 + 24$$

$$= 864$$

९.५ सचन ची अर्ही महत्तम असण्याकरिता न ची
 अर्ही काढणे.

$$\begin{aligned}\text{आता } s_n &= \frac{s(s-1)(s-2) \dots (s-n+1)}{n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{s-n+1}{n} \times s_{n-1}\end{aligned}$$

यावरून s_{n-1} ला $\frac{s-n+1}{n}$ ने गुणून

s_n प्राप्त होते.

$$\text{किंवा } \frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{s-n+1}{n}$$

$$\text{आता } \frac{s-n+1}{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1 \text{ असल्यास } s_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s_{n-1}$$

$$\text{किंवा } n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{s+1}{2} \text{ असल्यास } s_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s_{n-1}$$

प्रकार १ ला— समजा s सम आहे आणि t कोणताही धन पूर्णांक असून $s = 2t$ आहे.

$$\therefore \text{ म्हणून } \frac{s+1}{2} = \frac{2t+1}{2} = t + \frac{1}{2}$$

आता n ज्या १ पासून t पर्यंत सर्व अहाँकरिता $n < \frac{s+1}{2}$

$$\therefore s_n > s_{n-1}$$

आता $n=2, 3, \dots$ त घेऊन

$$s_{चत} > s_{चत-1} > s_{चत-2} \dots > s_{च_3} > s_{च_2} > s_{च_1}$$

यावरून $s_{च_1}, s_{च_2}, \dots, s_{चत-1}, s_{चत}$ यांपैकी $s_{चत}$ ची
अर्ही महत्तम आहे.

आता n च्या आगामी उच्चातर अर्ही $t+1, t+2, \dots, 2t$
ह्या आहेत म्हणून :

$$n > \frac{s+1}{2}$$

म्हणून $s_{चत} < s_{चत-1}$

$$\text{अर्थात् } s_{चत} > s_{चत+1} > s_{चत+2} \dots > s_{च_{2t}}$$

यावरून $s_{चत}, s_{चत+1}, \dots, s_{चत+2t}$ यांपैकी
 $s_{चत}$ ची अर्ही महत्तम आहे

म्हणून $s_{च_1}, s_{च_2}, \dots, s_{च_{2t}}$ मध्ये $s_{चत}$ ची
अर्ही महत्तम आहे पण $= s_{चत}$

म्हणून s सम असल्यास $s_{चत}$ याची अर्ही महत्तम असते.

अकार २ रा—

समजा s विषम आहे. थ हा धनपूर्णांक मखून
 $s=2य+1$ आहे.

$$\text{म्हणून } \frac{s+1}{2} = \frac{2य+1+1}{2} = य+1$$

आता न च्या १ पासून थ पर्यंत सर्व अर्थांकरिता $n < \frac{s+1}{2}$

$$\text{म्हणून } s_{cn} > s_{cn-1}$$

आता $n = 1, 2, 3 \dots$ थ हे आदेश करून

$$s_{cn} > s_{cn-1} > s_{cn-2} \dots s_{c1} > s_{c0} > s_{c-1}$$

अर्थात् $s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{cn}$ यांपैकी s_{cn} ही अर्हा

: महत्तम आहे.

$$\text{आता } n = \text{थ} + 1 \text{ असल्यास } s_{cn} = s_{cn+1}$$

पुन्हा न च्या $(\text{थ} + 2)$ पासून $(2\text{थ} + 1)$ च्या अर्थांकरिता

$$s_{cn} < s_{cn+1}$$

: आता $n = \text{थ} + 2, \dots, 2\text{थ} + 1$ ठेवा.

$$\text{म्हणजे } s_{cn+1} > s_{cn+2} > s_{cn+3} \dots s_{cn+1}$$

म्हणून $s_{cn+1}, s_{cn+2}, s_{cn+3} \dots, s_{cn+1}$ यांपैकी

s_{cn+1} ची अर्हा महत्तम आहे.

यावरून जेव्हा स विषम असून $2\text{थ} + 1$ समान असतो तेव्हा

s_{cn} आणि s_{cn+1} महत्तम असून समान असतात.

$$\text{आता } s = 2\text{थ} + 1$$

$$\therefore \text{थ} = \frac{s-1}{2}$$

म्हणून स विषम असल्यास

$\frac{सचस-1}{2}$ आणि $\frac{सचस+1}{2}$ यांच्या अर्धा महत्तम असून

समान असतात.

९.६ (म+n) विजातीय वस्तूंचे अनुक्रमे म' आणि न वस्तू असणारे दोन समूह किती संभाव्य प्रकारांनी निर्माण होतात ते काढणे.

आता (म+n) विजातीय वस्तूंचे प्रत्येकी म आणि न वस्तू असणाऱ्या समूहांच एकेंदर प्रकार काढणे हें (म+n) वस्तूंपैकी म वस्तूंच राव संभाव्य संख्य करण्यासारखेच आहे

कारण प्रत्येकेवेलीं न वस्तूंचा एक समूह करतांना आपोआपच न वस्तूंचा एक समूह होतो.

$$\text{म्हणून इष्ट प्रकार} = \frac{म+n}{म [(म+n) - म]}$$

$$= \frac{म+n}{म न}$$

टीप— जर म=n असेल तर म आणि न यांच्या संख्यां-
तील वस्तूंची संख्या समान होते. आणि म्हणून समूहांच्या
व्यतिहरणामुळे नवीन समूह-निर्मित होत नाही. दिलेल्या

घस्तृच्या प्रत्येक विभाजनांत व्यतिहरणाचे प्रकार २ अस-
ल्यामुळे संचयाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$\frac{2m}{m \mid m \mid 2}$$

२.६१ (म+न+ट) घस्तृचे अनुक्रमे म, न आणि ट
घस्तू असणारे तीन समूह किती. संभाव्य प्रकारांनी
निर्माण होतात ते काढणें.

प्रथम (म+न+ट) घस्तृचे म आणि (न+ट) घस्तू
असणाऱ्या दोन समूहांत भाग करा. म्हणजे वरील अनु-
च्छेदावरून एकंदर संभाव्य प्रकार

$$\frac{m+n+T}{m \mid n+T}$$

आता (न+ट) घस्तृच्या एका समूहाचे न आणि ट
घस्तू असणारे दोन समूह $\frac{n+T}{n \mid T}$ इतक्या प्रकारांनी

होतील. पण (न+ट) घस्तू असणाऱ्या समूहाचे संभाव्य

प्रकार $\frac{m+n+T}{m \mid n+T}$ आहेत.

म्हणून (म+न+ट) वस्तूंचे प्रत्येकी म, न आणि ट वस्तू असणारे तीन समूह करण्याचे एकंदर प्रकार

$$= \frac{\text{म+न+ट}}{\text{म} \quad \text{न+ट}} \times \frac{\text{न+ट}}{\text{न} \quad \text{ट}} = \frac{\text{म+न+ट}}{\text{म} \quad \text{न} \quad \text{ट}}$$

किती वस्तूंचा समूह आधी करावयाचा याला मुळीच प्राधान्य नाही हा गोष्ट अंतिम फलाच्या रूपावरून सहज व्याप्तांत येईल.

टीप— जर म=न=ट असेल तर म, न आणि ट यांच्या संचयांतील वस्तूंची संख्या समान होते. आणि समूहांच्या व्यतिहरणामुळे नवीन समूह-निर्मिति होत नाही. दिलेल्या वस्तूच्या प्रत्येक विभाजनांत व्यतिहरणामुळे ३ प्रकार असल्यामुळे संचयाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$\frac{३म}{\text{म} \quad \text{म} \quad \text{म} \quad ३}$$

उदाहरण— २४ विद्यार्थ्यांचा एक वर्ग आहे. त्यांतून समान विद्यार्थ्यांचे तीन गट पाडावयाचे आहेत. तर हे गट किती प्रकारांनी पाडता येतील ?

आपल्याला प्रत्येक गटांत समान विद्यार्थी असलेले गट पाडावयाचे आहेत. एकंदर विद्यार्थी २४ आहेत. म्हणून प्रत्येक गटांत ८ विद्यार्थी राहतील.

$$\therefore \text{संचयाचे प्रकार} = \frac{128}{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

९.७ आतापर्यंत आपण केवळ विजातीय वस्तूच विचारांत घेतल्या परंतु दिलेल्या वस्तूंपैकी कांही सजातीय किंवा समरूप (like) असल्यास प्रश्न कसे सोडवावयाचे ते आपण पाहू.

आता सजातीय आणि विजातीय हे शब्द कोणत्या अर्थाने वापरले जातात हे प्रथम पाहिले पाहिजे.

एकाच साधारण धर्माच्या वस्तूंना सजातीय वस्तू असे म्हणतात.

भिन्न धर्माच्या वस्तूंना विजातीय वस्तू असे म्हणतात.

९.७१ दिलेल्या स वस्तूंपैकी त एका प्रकारच्या सजातीय, थ दुसऱ्या प्रकारच्या सजातीय आणि इतर सर्व वस्तू एकैकशः विजातीय असल्यास त्या वस्तूंच्या विन्यासाच्या प्रकारांची संख्या काढणे.

समजा स वर्ण दिले आहेत. त्यांपैकी त वर्ण फ, थ वर्ण ख उर्वरित (स-त-थ) वर्ण एकैकशः विजातीय आहेत.

समजा क्रमचर्यांचे संभाव्य प्रकार य आहेत.

आता सजातीय न वर्ण एकैकशः परस्परांहून भिन्न आणि उरलेल्या वर्णांहून भिन्न मानल्यास क्रमचर्यांच्या प्रत्येक प्रकारापासून इतर वर्णांची स्थिति न बदलतां तु नव क्रमचर्या निर्माण होतात.

म्हणून y क्रमचयापासून $y \times \underline{t}$ क्रमचय निर्माण होतात.

तसेच सजातीय थ वर्ण एकैकशः विजातीय मानल्यास $y \times \underline{t} \times \underline{y}$ क्रमचय निर्माण होतात.

सजातीय t आणि सजातीय थ वर्णांपैकी सर्वच विजातीय वर्ण घेतल्यामुळे सर्वच्या सर्व वर्ण विजातीय झाले आहेत. आता त्यांच्या क्रमचयांचे प्रकार = \underline{s}

$$\text{म्हणून } y \times \underline{t} \times \underline{y} = \underline{s}$$

$$\text{किया } y = \frac{\underline{s}}{\underline{t} \underline{y}}$$

$$\therefore \text{इष्ट फल} = \frac{\underline{s}}{\underline{t} \underline{y}}$$

उदाहरण— एकंदर १० वर्ण आहेत त्यांपैकी २ वर्ण क, ३ वर्ण ख आणि उर्वरित वर्ण एकैकशः विजातीय आहेत. तर क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार किती ते पाढा.

१० वर्णांपैकी २ एका प्रकाराचे, ३ दुसऱ्या प्रकाराचे आणि उर्वरित ५ भिन्न भिन्न प्रकाराचे आहे. तेव्हा क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार

$$= \frac{\underline{10}}{\underline{2} \underline{3}}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 302400$$

९.८ स प्रकारांच्या वस्तूंपैकी प्रत्येक वेळा न वस्तूंना क्रमचय करतांना, प्रत्येक वस्तु पुन्हा पुन्हा अशी न वेळां घेतां येत असल्यास, क्रमचयांचे संभाव्य प्रकार किती ?

दिलेल्या वस्तूंपैकी प्रत्येक वस्तु कोणत्याहि विन्यासांत घाटेल तितक्या वेळा घेतां येत असल्यास त्या वस्तूंनी न जागा भरण्याचे स प्रकारांचो संख्या काढायची आहे.

पहिली जगा स वस्तूंपैकी कोणत्याहि एकीने भरतां येते. म्हणून पहिली जागा भरण्याचे स प्रकार आहेत.

पहिली जागा कोणत्याहि एका प्रकारें भरल्यानंतर दुसरी जागा पुनः स पैकी कोणत्याहि एकीने भरता येते अर्थात् ती जागा भरून काढण्याचे स प्रकार आहेत म्हणून पहिल्या दोन जागा भरण्याचे $s \times s = s^2$ प्रकार आहेत.

तिसरी जागाहि स प्रकारांनी भरतां येते. म्हणून पहिल्या तीन जागा $s^2 \times s = s^3$ प्रकारांनी भरतां येतात.

अशाप्रकारें जितक्या जागा भरल्या जातात त्याच घातास स चें उन्नयन करून येणाऱ्या संख्येसमान त्या जागा भरण्याचे संभाव्य प्रकार होतात. म्हणून न जागा भरून काढण्याचे संभाव्य प्रकार s^n आहेत.

उदाहरण— ३ पारितोषिके ५ मुलांमध्ये—प्रत्येक मुलगा सर्व

पारितोषिकें मिळविण्यास पात्र असल्यास— किती प्रकारांनी देता येतील ?

३ पारितोषिकांपैकी कोणतेंहि एक ५ मुलांपैकी कोणाहि एकाला देता येतें. म्हणून तें पारितोषिक देण्याचे ५ प्रकार आहेत.

पहिलें पारितोषिक कोणत्याहि एका प्रकारें दिल्यानंतर उरलेल्या २ पारितोषिकांपैकी कोणतेंहि एक पुन्हा ५ पैकी कोणाहि एकाला देता येतें म्हणून दोन पारितोषिक देण्याचे एकंदर प्रकार ५.

दुसरें पारितोषिक एकाला दिल्यानंतर तिसरें पारितोषिक पुन्हा ५ पैकी कोणाहि एकाला देता येतें म्हणून तिन्ही पारितोषिकें देण्याचें संभाव्य प्रकार

$$= 5^2 \times 5 = 5^3 = 125$$

९.८१ स वस्तूंपैकी कांही किंवा सर्वच निवडल्यास निवडणुकीचे संभाव्य प्रकार दाढणें.

आता प्रत्येक वस्तु एकतर निवडली जाईल किंवा नाळली जाईल. म्हणून प्रत्येक वस्तु दोन प्रकारांनी विचारांत घेतली जाते. ह्या सर्व विचारांचा एकूण संबंध जोडल्यास सर्व प्रकार

$$= 2 \times 2 \times 2 \times \dots \quad \text{स अवयवांपर्यन्त.}$$

$$= 2^n$$

परंतु या सर्व प्रकारांत, ज्यांत प्रत्येक वस्तु नाळली

आहे असाहे एक प्रकार समाविष्ट झाला आहे. अर्थात् तो गालला पाहिजे.

म्हणून एकंदर संभाव्य प्रकार = २४ - १

१.८२ (त + थ + द + ...) वस्तूंमध्ये त एकप्रकारच्या सजातीय, थ दुस-याप्रकारच्या सजातीय. द तिसऱ्या-प्रकारच्या सजातीय आहेत. त्यांपैकी कांहींची किंवा सर्वांची निवड करावयाची असल्यास निवडणुकीच्या प्रकारांची संख्या काढणे.

आता पाहिल्या प्रकारच्या त सजातीय वस्तूंपैकी १, २, ३, किंवा त वस्तू निवडल्या जातील किंवा एकाही निवडली जाणार नाही. म्हणून त वस्तूच्या निवडणुकीचे प्रकार (त + १) होतील.

त्याचप्रमाणे सजातीय थ वस्तूच्या निवडणुकीचे प्रकार (थ + १) आणि सजातीय द वस्तूच्या निवडणुकीचे प्रकार (द + १) होतील.

तेथेच इतरही सजातीय वस्तूकरिता हाच नियम लागू होईल.

म्हणून दिलेल्या वस्तूंच्या निवडणुकीचे प्रकार

$$= (त + १)(थ + १)(द + १).....$$

परंतु या सर्व प्रकारांत, ज्यांत कोणतीच वस्तू निवडली जात नाही असा एक प्रकार समाविष्ट केला आहे. अर्थात् हा प्रकार गालला पाहिजे.

∴ निवडणुकीचे इष्ट प्रकार

$$= [(त + १) (थ + १) (द + १) \dots\dots\dots] - १$$

उदाहरण १— एका दूरलिप्यसाधित्राला (telegraph apparatus) ६ भुजा आहेत विधामावस्थेसकट प्रत्येक भुजेन ५ भिन्न सिग्नल दाखवितां येणें शक्य आहे. तर निरनिराळे/सिग्नल करण्याचे प्रकार १५६२४ आहेत. हे सिद्ध करा.

पहिली भुजा विधामावस्थेसकट ५ सिग्नल करूं शकते पहिल्या भुजेची ५ पैकी काणतीही एक स्थिति निश्चित झाली म्हणजे दुसरी भुजा विधामावस्थेसकट ५ सिग्नल करूं शकते म्हणून दोन्ही भुजा ५^२ सिग्नल करूं शकतात. यांतच दोर्धीची एकाच वेळीही विधामावस्थेसकट गणली गेली आहे.

तीन भुजा ५^३ सिग्नल दाखवितात.

यावरून एकंदर ६ भुजांनी ५^६ सिग्नल दर्शविले जातात. पण ह्या सर्व प्रकारांत ज्यांत सर्व भुजा विधामास्थितीत राहतील त्याही एक प्रकार राहिल. तो वगळून

$$\text{एकंदर प्रकार} = ५^६ - १ = १५६२४$$

उदाहरण २— एका आगगाडीला १६ डबे आहेत त्यांपैकी पहिल्या वर्गाचे ३, दुसऱ्या वर्गाचे ४, आणि तिसऱ्या वर्गाचे ५ असून इतर निरनिराळ्या कामाचे आहेत, तर ते डा किती प्रकारांनी जोडता येतील ?

तसें पहिल्या वर्गाचे तिन्ही डबे लागोपाठ जोडल्यास ते सर्व डा किती प्रकारांनी जोडतां येतील ?

आगगाडीच्या १६ डब्यांपैकी ३ एका प्रकारचे, ४ दुसऱ्या

प्रकारचे आणि ५ तिसऱ्या प्रकारचे असून इतर ४ निरनिराळे आहेत.

$$\text{म्हणून क्रमचयाचे प्रकार} = \frac{116}{3 \quad 3 \quad 4}$$

आता पहिल्या वर्गाचे तिन्ही डवे एका ठिकाणी जोडल्यास त्या तिघांचा मिळून एकच डग मानावा लागतो. अर्थात् एकंदर डव्यांचा संख्या १४ होते. त्यापैकी ४ एका प्रकारचे, ५ दुसऱ्या प्रकारचे आणि इतर ५ निरनिराळ्या प्रकारचे आहेत.

$$\therefore \text{क्रमचयांचे प्रकार} = \frac{14}{4 \quad 4}$$

उदाहरण ३— ११ वर्ण दिले असून त्यांपैकी दोन क, तीन ख, दोन ग आणि इतर घ, च, छ, ज माहेत तर कोणत्याही चार वर्णांच्या प्रवरणांचे तसेच विन्यासांचे प्रकार किती ते काढा.

एकंदर वर्ण ११ असून त्यांच्या जाती ७ आहेत.

क, क; ख, ख, ख; ग, ग; घ, घ, ङ, ञ.

चार चारांचा समूह करतांना त्यांचे खलोलप्रमाणे वर्गीकरण करता येईल.

(१) ३ सजातीय आणि एक विजातीय

(२) २ सजातीय आणि दुसरे २ सजातीय

(३) २ मजातीय आणि २ विजातीय

(४) चारही विजातीय

(१) ख हेच केवळ तीन सजातीय वर्ण आहेत, त्यांच्या बरोबर क, ग, घ, च, छ आणि ज या ६ पैकी कोणताही एक वर्ण घेतां येईल म्हणून अशा प्रवरणाचे ६ प्रकार होतात.

(२) २ क, ३ ख आणि २ग मधून दोन दोन सजातीय वर्ण निवडतां येतात. त्याचे प्रकार 2P_2 म्हणजेच ३.

(३) २ क, ३ख, आणि २ग मधून एक सजातीय युग्म तीन प्रकारे घेतां येत. आणि या प्रत्येक प्रकाराबरोबर घ, च, छ, ज हे आणि क, ख, ग पैकी दोन अशा एकंदर सहा वर्णांतून कोणतेही २ घेतां येतात म्हणून ह्या प्रवरणाचे प्रकार

$$= 3 \times {}^6P_2$$
$$= \frac{3 \times 6 \times 5}{1 \times 2} = 45$$

(४) क, ख, ग, घ, च, छ, ज या वर्णांपैकी कोणतेही चार वर्ण घेतल्यास प्रवरणाचे प्रकार

$$= {}^7P_4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$$

. प्रवरणाचे सर्व संभाव्य प्रकार

$$= 6 + 3 + 45 + 35$$

$$= 89$$

आता क्रमचयाचे प्रकार दाढण्याकरिता संचयाच्या प्रत्येक प्रकारात किती क्रमचय होतात हें दाढलें पाहिजे.

पहिल्या प्रकारापासून $\frac{६ \times \underline{१४}}{\underline{३}} = २४$ क्रमचय

दुसऱ्या प्रकारापासून $३ \times \frac{\underline{१४}}{\underline{२} \quad \underline{२}} = २८$ क्रमचय

तिसऱ्या प्रकारापासून $४५ \times \frac{\underline{१४}}{\underline{१०}} = ५४०$ क्रमचय

चवथ्या प्रकारापासून $३५ \times \underline{१४} = ८४०$ क्रमचय

तेव्हा क्रमचयांचे एकंदर प्रकार

$$= २४ + २८ + ५४० + ८४०$$

$$= १४२२$$

प्रश्नसंग्रह १४

- (१) मुंबई ते कराची जा ये करणाऱ्या ८ आगवोटी आहेत. एक मनुष्य मुंबईहून कराचीस एका आगवोटीने जाऊन दुसऱ्याच आगवोटीने परत येत असल्यास किती प्रकारांनी तो जाये करू शकल ?
- (२) १० कादंबऱ्या, ६ मासिके आणि ८ वर्तमानपत्रे यांपैकी प्रत्येकांतून एक एक घेतल्यास प्रचुरणाचे किती प्रकार होतील ?

- (३) एका फळीवर केवळ आठच पुस्तके मावतात. परंतु हाताशी १२ पुस्तके आहेत. तर ती किती निरानिराळ्या प्रकारांनी त्या फळीवर ठेवता येतील ?
- (४) ८ पुस्तकांपैकी दोन विशिष्ट पुस्तके लागोपाठ येतील अशा प्रकारे ती एका फळीवर लावावयाची आहेत. तर त्यांच्या रचनेचे प्रकार किती ?
- (५) १० मुळांची एक रांग करावयाची आहे. तर ती किती प्रकारांनी करता येईल ? यांपैकी किती प्रकारांत आद्य आणि अंत्य स्थानी दोन विशिष्ट मुळे उभी राहतील ?
- (६) परीक्षेच्या ११ प्रश्नपत्रिका क्रमाने लावावयाच्या आहेत. परंतु त्यांतील गणिताच्या ३ प्रश्नपत्रिकांपैकी कोणत्याहि दोन लागोपाठ येता कामा नयेत. तर त्या किती प्रकारांनी लावता येतील ?

(७) हताच्या रूपांत व्यक्त करा.

$$(१) १२ \times ११ \times १० \quad (२) ८ \times ९ \times १० \times ११$$

$$(३) s(s-1)(s-2)(s-3)$$

$$(४) s(s+1)(s+2)$$

$$(५) s(s+1)(s+2)(s+3)\dots\dots(s+n)$$

(८) सरळ रूप द्या—

$$(१) \frac{\frac{s}{s-2}}{\frac{s}{s-2}} \quad (२) \frac{s}{s-2} - \frac{s-2}{s-2}$$

(९) सिद्ध करा—

$$(१) \frac{2s}{s} = 2^s [1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots (2s-1)]$$

$$(२) 2 \times 6 \times 10 \times 14 \dots (4s-6) (4s-2)$$

$$= (s+1) (s+2) (s+3) \dots (2s-1) (2s)$$

(१०) इंद्रधनुष्याच्या सात रंगांपैकी निळा आणि हिरवा रंग जवळ जवळ येणार नाहीत अशाप्रकारे त्यांचा विन्यास केल्यास विन्यासाचे संभाव्य प्रकार किती ?

[मुंबई १९१८]

(११) तीन व्यंजने आणि दोन स्वर मिळून असे शब्द तयार करावयाचे आहेत को ज्यांत दोन व्यंजने फधीहि जवळ जवळ येणार नाहीत तर शब्द किती होतील ?

(१२) ${}^1c_1, {}^2c_1, {}^3c_1$ आणि 4c_1 यांच्या अर्हा काढा.

(१३) ${}^1k_1, {}^2k_1$ आणि 3k_1 यांच्या अर्हा काढा.

(१४) ${}^2s_1 = {}^2s_{n+1}$ असल्यास n ची अर्हा काढा.

(१५) $m = {}^2s_1$ असल्यास $m = 3$ च्या 2s_1 आहे हे दाखवा. [दिलकत्ता १९१२]

(१६) एका आगगाडीच्या डब्यांत उताळंना असण्याकरितां ६ जागा आहेत. दोन उताळ किती प्रकारांनी त्या जागांवर बसू शकतील ?

(१७) ५ स्त्रिया आणि तीन पुरुष टेनिस खेळणार आहेत एक पक्ष पूर्णतः पुरुषांचा होऊं घ्यावयाचा नसल्यास किती प्रकारांनी गट पाडतां येतील ?

(१८) क्रिकेटपटूंच्या दोन समूहांत अनुक्रमे ६ आणि ८ खेळाडू आहेत. त्यांसर्यामधून ११ जणांची एक क्रिकेट-चमू निवडावयाची आहे. ६ जणांच्या समूहांतून कमीत कमी ४ खेळाडू घ्यावयाचे असल्यास ती चमू किती प्रकारांनी बनविता येईल ? [मद्रास १८९०]

(१९) दोन क्रिकेट मंडळांत प्रत्येकी १५ सदस्य आहेत त्यांच्यामध्ये होणाऱ्या सामन्यांत दोन्ही मंडळांतून ११-११ सदस्य निवडावयाचे आहेत, परंतु पहिल्या मंडळांतील क हा सदस्य प्रत्येक निवडणुकीत घेतला जाईल उलट ख हा सदस्य नेहमीच वगळला जाईल, तर किती प्रकारे सामना होऊ शकेल ?

(२०) एका क्रिकेटमंडळाचे १४ सदस्य असून त्यांपैकी गोल-दांजी ५ जणांना करता येते. ११ जणांच्या चमूमध्ये प्रत्येक वेळी कमीत कमी ३ गोलंदाज घ्यावयाचेच असल्यास त्या सर्व सदस्यांमधून ती चमू करण्याचे किती भिन्न प्रकार होतील ? [आंध्र १९४१]

(२१) १६ क्रिकेट खेळाडूंपैकी ६ जण गोलंदाज, व ३ जण त्रिफळीरक्षक आहेत. ११ जणांच्या चमूमध्ये ४ गोलंदाज आणि २ त्रिफळीरक्षक नेहमीच असल्यास प्रचरणाचे किती प्रकार होतील ? [आंध्र १९३५]

(२२) १, ३, ५ आणि ७ यांतील प्रत्येक अंक एकदाच येईल अशा १००० पुढील किती संख्या होतील ? या संख्यांचा योगहि काढा.

(२३) दिलेल्या १२ वस्तूंपैकी ८ चरतूंच्या किती क्रमचयांत

चार ठराविक वस्तू राहतील ते काढा.

[नागपूर १९२५]

- (२३) दिलेल्या १० वस्तूंपैकी ४ वस्तूंचे क्रमचय केल्यास त्यांपैकी किती क्रमचयांत एक ठराविक वस्तु येईल आणि किती क्रमचयांतून तीच वस्तु गाळली जाईल ?
[कलकत्ता १९३६]

- (२५) एका आतिथ्यशील सद्गृहस्थाला आपल्या ४० मित्रांपैकी निरनिराळ्या मित्रांना बोलावून जास्तीत जास्त मेजवानी घ्यायच्या आहेत. प्रत्येक मेजवानीस येणाऱ्या मित्रांची संख्या सारखीच असल्यास एका घेलेस त्याने किती मित्रांना बोलावार्जे ? तो अशा किती मेजवानी देईल ?
[मुंबई १८८४]

- (२६) एक मनुष्य आपल्या १२ मित्रांचे गट पाहून निमंत्रण देतो. प्रत्येकगटां निमंत्रितांची संख्या समान असून गटांची संख्या जास्तीत जास्त होण्यास प्रत्येक गटांत त्याने किती मित्र बोलावेत ?
एकच मित्र ज्या गटात येईल असे गट किती ?
[म्हैसूर १९३२]

- (२७) एका वाचनालयांत १६ संस्कृत आणि ८ मराठी पुस्तके आहेत. त्यांतील एका फळावर ४ संस्कृत आणि ३ मराठी पुस्तके अशा ७ पुस्तकांचा समूह किती प्रकारांना ठवतां येईल ?

- (२८) ७ विंदू आणि ५ प्रास हे एका ओळींत किती प्रकारांनी ठेवितां येतील ?

(२९) २ निळ्या, १ पांढरी, १ लाल आणि १ काळी अशा ५ पताकांनी किती प्रकारचे सिग्नल केले जातील ?

(३०) एका वाचनालयांत एका पुस्तकाच्या ५ प्रती, २ पुस्तकांच्या प्रत्येकी ४ प्रती, ३ पुस्तकांच्या प्रत्येकी ६ प्रती आणि ८ निरानिराली पुस्तक आहेत. तर ती पुस्तक किती प्रकारांनी लावता येतील ?

[बलकृता १९३४]

(३१) स विजातीय वस्तूंची न वस्तूंच्या क्रमचयांच्या प्रकारांचे क्रम ने अभिधान केले तर

$$क्र_१ + \frac{क्र_१}{१२} + \frac{क्र_२}{१३} + \dots + \frac{क्र_२५}{१२५} = २४ - १$$

है दाखवा.

[मद्रास १८८०]

(३२) १५ चेड्डंगैकी ६ काळे, ५ लाल आणि ४ पांढरे असल्यास ते एका थोळीत किती प्रकारांनी ठेविता येतील ?

(३३) २ पांढऱ्या, २ काळ्या आणि २ लाल पताकांनी, (प्रत्येक सिग्नल सहाहि पताकांनी केला असल्यास) किती प्रकारचे सिग्नल करता येतील ?

(३४) ०, १, १, २, ३, ४ या अंकांपासून (१००० च्या पुढील) चार अंकी किती संख्या तयार करता येतील ?

[मद्रास १८८९]

(३५) १, २, ३, ३, ३, ४ हे अंक उपयोगांत आणून ४००० च्या खालच्या किती संख्या तयार करता येतील ?

[मद्रास १९१८]

- (३६) १२१२०२ या संख्येतील अंकांनी सहा अंकी किती वेगवेगळ्या संख्या होतील तें काढा. [मद्रास १८८६]
- (३७) २, ३, ०, २, ३, ३ या अंकापासून ६ अंकी किती संख्या तयार होतील ?
- (३८) प्राध्यापकाच्या एका जागेकरिता ३ उमेदवार आहेत. त्यांची निवड ५ माणसांच्या मताने व्हावयाची असल्यास किती प्रकारांनी मतदान केलें जाईल ?
- (३९) एका वर्ण-कुलपाला ४ वलयें असून प्रत्येक वलयावर ८ निरनिराळे वर्ण आहेत. ह्या वर्णांच्या द्वारे निरनिराळे किती सांकेतिक शब्द तयार होतील ?
- (४०) एका निवडणुकीसाठी ५ उमेदवार असून ३ च निवडावयाचे आहेत. प्रत्येक मतदाराला तीन मते आहेत. तर तो ती किती प्रकारांनी देऊ शकेल ?
- (४१) खालील नाणी घेऊन किती रकमा करता येतील तें काढा. १ रुपया, १ अघेली, १ पावली, १ चवली आणि १ आणेली.
- (४२) ३ लाल, २ निळ्या, २ पिवळ्या, १ हिरवी, १ पांढरी आणि १ जांभळी अशा पताकांतून ४ पताकांचें (१) प्रवरण तसेच (२) विन्यास किती प्रकारांनी होतील ?
- (४३) द्वादशभुजाचे कोणविंदू सांधून किती त्रिकोण तयार होतात ?
- (४४) एका समतलांत न विंदू असून त्यांपैकी केवळ म विंदूच एका सरळ रेषेत आहेत. तर

(१) निरनिराळ्या सर्व रेषा आणि

(२) निरनिराळे सर्व त्रिकोण किती येतील ते काढा.

[कलकत्ता १९२८

(४५) एका रेल्वेवर स स्टेशने आहेत. एक आगगाडी कोणत्याही लागोपाठच्या स्टेशनवर न थांबता, यांपैकी कोणत्याही तीन स्टेशनांवर

$\frac{1}{6}$ (स-२) (स-३) (स-४) प्रकारे थांबते हे दाखवा.

(४६) एका रेल्वेवर १० स्टेशने आहेत. प्रत्येक स्टेशनपासून इतर सर्व स्टेशनची तिसऱ्या घर्गाची तिकिट देता येत असल्यास त्या तिकिट्यांचे किती प्रकार होतील ते काढा.

(४७) एका दूरलिखसाधित्राला ५ भुजा आहेत. त्यांपैकी प्रत्येक विश्रामस्थितीसकट चार स्पष्ट सिग्नल देऊ शकते. तर सिग्नलांची एकंदर संख्या १०२३ आहे हे दाखवा.

$$\text{पुन्हा } 1+2=(1)+2$$

$$=\frac{1(1+1)}{2}+2 \quad [(घ) \text{ चा उपयोग करून}]$$

$$=\frac{2(2+1)}{2} \quad \dots\dots\dots(इ)$$

म्हणून $s=2$ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

$$\text{पुन्हा } 1+2+3=(1+2)+3$$

$$=\frac{2(2+1)}{2}+3 \quad [(इ) \text{ चा उपयोग करून}]$$

$$=\frac{3(3+1)}{2}$$

म्हणून $s=3$ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

ह्यावरून, प्रत्येक फल सिद्ध करण्यास त्या पूर्वीच्या फलाचा उपयोग केला आहे आणि म्हणून प्रत्येक फलसिद्धि पूर्वीच्या फलावर अवलंबून आहे हे लक्षांत येईल.

आता s च्या प ह्या विशिष्ट अर्हेंकरिता विधान (अ) सत्य आहे असे गृहीत धरल्यास तें $s=(p+1)$ करिता सत्य आहे हे सिद्ध करूं.

समजा

$$1+2+3+\dots+p=\frac{p(p+1)}{2}$$

ह्या संबंध सत्य आहे.

दोन्ही बाजूंत $(p+1)$ मिळया.

$$\therefore 1+2+3+\dots+p+(p+1)=\frac{p+(p+1)}{2}+(p+1)$$

$$=\frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

म्हणून $s=p+1$ करिताहि विधान सत्य आहे हें दिसून येतें.

ह्यावरून, $s=p$ करिता जर आपली मानना (supposition) सत्य असेल तर $s=p+1$ करिताहि ती सत्य असते.

ह्यावरून असा निष्कर्ष काढतां येतो की, s च्या कोणत्याहि विशिष्ट अर्हेकरिता विधान (अ) सत्य असेल तर s च्या आगामी (next) उच्चस्तर अर्हेकरिताहि तें सत्य असतें.

आता $s=1$ करिता आपण विधान (अ) सिद्ध पेलें आहेच. म्हणून $s=2$ करिताहि तें सत्य आहे.

$s=2$ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून $s=3$ करिताहि तें सत्य आहे.

$s=3$ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून $s=4$ करिताहि सत्य आहे.

पुन्हा $s=4$ करिता विधान (अ) सत्य आहे.

म्हणून तें $s=5$ करिताहि सत्य आहे.

ह्या विधीचा सतत प्रयोग करून हें विधान s च्या दिलेल्या धन पूर्णांक अर्हाकरिता सत्य आहे हें सिद्ध होतें.

उदाहरण २— s हा कोणताहि धन पूर्णांक असतां

य^स - र^स चा (य-र) हा एक अवयव आहे हें विधान गणितीय अनुमानाच्या पद्धतीने सिद्ध करा.

प्रथमतः स=१ असतांना य^स - र^स चा (य-र) हा अवयव आहे हें स्पष्ट आहे.(१)

म्हणून स=१ करिता वरील विधान सत्य आहे.

जेव्हा स=२, तेव्हा य^स - र^स = य^२ - र^२

आता य^२ - र^२ = य(य-र) + र(य-र)

उजव्या पक्षांत (य-र) हा दोन्ही पदांचा अवयव आहे. म्हणून तो (य^२ - र^२) चाहि अवयव आहे.(२)

म्हणून स=२ करिता वरील विधान सत्य आहे.

आता स=३ असतांना

$$\begin{aligned} \text{य}^3 - \text{र}^3 &= \text{यय}^2 - \text{यर}^2 + \text{यर}^2 - \text{र} \times \text{र}^2 \\ &= \text{य}(\text{य}^2 - \text{र}^2) + \text{र}^2(\text{य} - \text{र}) \end{aligned}$$

(१) आणि (२) वरून य^३ - र^३ आणि (य-र) ह्यांचा (य-र) हा अवयव आहे. त्यावरून (य-र) हा य^३ - र^३ चाहि अवयव आहे.

म्हणून स=३ करिता वरील विधान सत्य आहे.

आता स=५ प ह्या विशिष्ट अर्हेकरिता वरील विधान सत्य आहे असे गृहीत धरल्यास तें स=५+१ करिताहि सत्य आहे हें आपण दाखवूं.

$$\begin{aligned} \text{आता य}^{५+१} - \text{र}^{५+१} &= \text{यय}^५ - \text{यर}^५ + \text{यर}^५ - \text{रर}^५ \\ &= \text{य}[\text{य}^५ - \text{र}^५] + \text{र}^५[\text{य} - \text{र}] \end{aligned}$$

$y^p - r^p$ चा $(y - r)$ हा अवयव आहे हें आपण गृहीत धरले आहे.

उजव्या पक्षांतील दोन्ही पदांत $(y - r)$ साधारण असल्यामुळे $(y^{p+1} - r^{p+1})$ चा $(y - r)$ अवयव आहे.

ह्यावरून, $(y - r)$ हा $(y^p - r^p)$ चा अवयव आहे ही आपली मानना जर सत्य असेल तर तो $(y^{p+1} - r^{p+1})$ चाहि अवयव आहे.

ह्यावरून असा निष्कर्ष पाडतां येतो की, स च्या कोणत्याहि विशिष्ट अहंकरिता घरील विधान सत्य असेल तर स च्या आगाभी उच्चतर अहंकरिताहि तें सत्य आहे.

आता $s = 1$ करिता आपण घरील विधान सिद्ध केले आहेच.

म्हणून $s = 2$ करिताहि तें सत्य आहे.

$s = 2$ करिता तें सत्य आहे.

म्हणून $s = 3$ करिताहि तें सत्य आहे.

अर्थात् $(y - r)$ हा $(y^3 - r^3)$ चा अवयव आहे.

$s = 3$ करिता घरील विधान सत्य आहे.

म्हणून $s = 4$ करिताहि तें सत्य आहे. अर्थात् $(y - r)$ हा $(y^4 - r^4)$ चाहि अवयव आहे.

$s = 4$ करिता विधान सत्य आहे म्हणून $s = 5$ करिताहि तें सत्य आहे. अर्थात् $(y - r)$ हा $(y^5 - r^5)$ चाहि अवयव आहे.

ह्या विधीचा सतत प्रयोग करून स च्या घन पूर्णांक

अर्हंकरिता (यस-रस) चा (य-र) हा अवयव आहे हें विधान सत्य आहे हें दाखवितां येतें.

प्रश्नसंग्रह १५

गणितीय अनुमान पद्धतीने सिद्ध करा—

$$(१) \quad १^२ + २^२ + ३^२ + + स^२ = \frac{स(स+१)(२स+१)}{६}$$

$$(२) \quad १^३ + २^३ + ३^३ + + स^३ = \left[\frac{स(स+१)}{२} \right]^२$$

$$(३) \quad १ + ३ + ५ + + (२स-१) = स^२$$

$$(४) \quad १ \times २ + २ \times ३ + ३ \times ४ + + स(स+१) \\ = \frac{स(स+१)(स+२)}{३}$$

$$(५) \quad क + (क+च) + (क+२च) + ... + [क + (स-१)च] \\ = \frac{स}{२} [२क + (स-१)च]$$

$$(६) \quad क + कन + कन^२ + + कन^{स-१} = \frac{क[१-न^स]}{१-न}$$

(७) स च्या विषम घन पूर्णांक अर्हंकरिता य^स + र^स हा पदसंहतीचा (य+र) हा अवयव आहे.

$$(८) \quad \frac{१}{१ \times २} + \frac{१}{२ \times ३} + \frac{१}{३ \times ४} + + \frac{१}{स(स+१)} = \frac{स}{स+१}$$

प्रकरण अकरावें

द्विपद प्रमेय

(binomial theorem)

धन पूर्णांक घात

११.१ प्रत्यक्ष गुणाकार करून येणारी खालील गुणन-फलें विचारांत घ्या. ^२

$$(अ) (y + k_1)(y + k_2) = y^2 + (k_1 + k_2)y + k_1 k_2$$

$$(आ) (y + k_1)(y + k_2)(y + k_3) \\ = [y^2 + (k_1 + k_2)y + k_1 k_2] \times [y + k_3] \\ = y^3 + (k_1 + k_2 + k_3)y^2 \\ + (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3)y + k_1 k_2 k_3$$

$$(इ) (y + k_1)(y + k_2)(y + k_3)(y + k_4) \\ = [y^3 + (k_1 + k_2 + k_3)y^2 \\ + (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3)y + k_1 k_2 k_3] \\ \times (y + k_4)$$

$$= y^4 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) y^3$$

$$+ [k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3$$

$$+ k_2 k_4 + k_3 k_4] y^2$$

$$+ [k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 + k_1 k_3 k_4$$

$$+ k_2 k_3 k_4] y$$

$$+ k_1 k_2 k_3 k_4$$

जेव्हा अवयवांची संख्या अल्प असते तेव्हाच प्रत्यक्ष गुणाकार करून गुणनफल काढणे सुकर असते. परंतु अवयवांची संख्या फार मोठी असल्यास प्रत्यक्ष गुणाकार करणे अतिशय त्रासदायक होते.

हा त्रास दूर करण्याकरिता प्रत्यक्ष गुणाकार न करता गुणनफल काढण्याची रीति आपण शोधून काढली पाहिजे. (इ) या फलाच्या दक्षिण पक्षांतील पदांचे निरीक्षण करा. ते चार द्विपद अवयवांचा गुणाकार आहे. त्याच्या दक्षिण पक्षाकडे पाहिल्यास असे दिसून येते की सर्व संभाव्य प्रकारे दिलेल्या सर्व अवयवांतून प्रत्येकी एकच पद घेऊन आणि त्या सर्व पदांचा गुणाकार करून जीं पदे निर्माण होतात त्यांचा योग म्हणजेच दक्षिण पक्षांतील पदसहति होय.

आता प्रत्येक पदांतील गुणाकारांचा विचार करा.

(१) चारही अवयवांतून य घेतल्यास त्यांचा गुणाकार y^4 येतो. अशाप्रकारे y^4 हे प्रथम पद होते.

(२) सर्व संभाव्य प्रकारे निवडलेल्या तीन अवयवांतून

प्रत्येकीं य घेऊन आणि उरलेल्या एका अवयवांतील $क_१, क_२, क_३$ व $क_४$ यांपैकी एक राशि घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^३$ आहे. अशा प्रकारे $क_१, य^३, क_२, य^३, क_३, य^३$ आणि $क_४, य^३$ हीं पदे प्राप्त होतात. यांचा योग करून $(क_१ + क_२ + क_३ + क_४) य^३$ हे गुणनफळांतील दुसरे पद प्राप्त होते.

(३) सर्व संभाव्य प्रकारे निवडलेल्या दोन अवयवांतून $य$ आणि उरलेल्या दोन अवयवांतून $क_१, क_२, क_३$ आणि $क_४$ यांपैकी दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य^२$ आहे. हे संभाव्य प्रकार ४ च, आहेत. या सर्व गुणाकारांचा योग करून तिसरे पद प्राप्त होते.

(४) सर्व संभाव्य प्रकारे निवडलेल्या एका अवयवांतून $य$ आणि उरलेल्या तीन अवयवांतून $क_१, क_२, क_३$ आणि $क_४$ यांपैकी तीन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत $य$ आहे. ह्याचे संभाव्य प्रकार ४ च, आहेत. या सर्व गुणाकारांचा योग करून चवथे पद प्राप्त होते.

(५) पांचवे पद $य$ विरहित असून ते $क_१, क_२, क_३, क_४$ यांचा गुणाकार आहे. वर सांगितलेल्या रीतीने पुढील उदाहरण सोडविली आहेत.

उदाहरण १— गुणाकार करा—

$$(य-१)(य+३)(य+४)(य-८)$$

$$१४ गुणाकार = य^४ + [-१+३+४-८] य^३$$

$$+ [(-१)(३) + (-१)(४) + (-१)(-८)]$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \times 4 + 3(-4) + 4(-4)]y^2 \\
& + [(1-1)(3)(4) + (-1)(4)(-4) \\
& + 3 \times 4(-4) + (-1)(3)(-4)]y \\
& + (-1)(3)(4)(-4) \\
& = y^4 - 2y^3 - 8y^2 - 42y + 96
\end{aligned}$$

उदाहरण २—

(य+३)(य-५)(य+१)(य+२)(य-८) यांच्या गुणाकारांतील y^3 चा गुणक दाढा.

प्रत्येक संभाव्य प्रकारें दोन अवयवांतून य आणि उरलेल्या तीन अवयवांतून संख्यात्मक राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत y^3 आहे. यावरून y^3 चा गुणक ३, -५, १, २, -८ या पांच संख्यांतून सर्व संभाव्य प्रकारें कोणत्याहि तिघांच्या गुणाकारांचा योग आहे.

म्हणून इष्ट गुणक

$$\begin{aligned}
& = 3(-5)1 + 3(-5)2 + 3(-5)(-8) + 3 \times 1 \times 2 \\
& + 3 \times 1(-8) + 3 \times 2(-8) + (-5)(1)(2) \\
& + (-5)1(-8) + 1 \times 2(-8) + (-5)2(-8) \\
& = -15 - 30 + 120 + 6 - 24 - 48 - 10 + 40 - 16 + 80 \\
& = 103
\end{aligned}$$

११.२ स द्विपद अवयवांचा गुणाकार—

(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३) (य+क_स)
 हा गुणाकार विचारांत घ्या.

स द्विपद-अवयवांचें गुणनफल काढण्याकरिता पूर्वानु-
च्छेदांत, चार अवयवांकरिता दिलेल्या रीतीचाच आपण
उपयोग करूं.

स द्विपद-अवयवांचा संपूर्ण गुणाकार हा सर्व
संभाव्य प्रकारें स अवयवांतून प्रत्येकी एकच, पद
घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकाराच्या योगासमान असल्या-
मुळे अंतिम फलांत प्रत्येक पदाची विमा (dimension) स
आहे.

आता, य चा उच्चतम घात असणारें पद य^४ आहे. हें
पद प्रत्येक अवयवांतून य घेऊन त्यांच्या गुणाकारासमान
येतें.

सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या (स-१) अवयवांतून
प्रत्येकी य; आणि क_१, क_२, क_३ आणि क_४ यांपैकी
कोणतीही एक राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत
य^४-१ आहे. म्हणून अंतिम गुणाकारांत य^४-१ चा गुणक
क_१, क_२, क_३ आणि क_४ यांच्या योगासमान येतो.
ह्या योगाचें यो, ने अभिधान करा. यो, मध्ये एकंदर सच,
पद आहेत हें सहज लक्षांत येण्यासारखें आहे.

सर्व संभाव्य प्रकारें निवडलेल्या (स-२) अवयवांतून
य; आणि क_१, क_२, क_३ आणि क_४ यांपैकी कोण-
त्याही दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांत य^४-१
चा गुणक आहे. म्हणून अंतिम गुणाकारांत य^४-१ चा गुणक
क_१, क_२, क_३,आणि क_४ यांमधून सर्व संभाव्य प्रकारें
निवडलेल्या दोन राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांच्या

योगात्मान येतो. ह्या योगाचें यो_३ ने अभिधान करा. यो_३ मधील एकंदर पदांची संख्या घेऊन आहे.

आता, आपण सामान्य पद लिहूं.

समजा, सामान्य पदांत य चा घात (स-न) आहे.

म्हणून, सर्व संभाव्य प्रकार निवडलेल्या (स-न) अव-

यधांतून प्रत्येकीं य; आणि क_१, क_२, क_३ आणि क_स

यांपैकी कोणत्याहि न राशी घेऊन येणाऱ्या त्यांच्या गुणा-

कारांत य^{स-न} आहे. म्हणून क_१, क_२, क_३, आणि

क_स यांमधून सर्व संभाव्य प्रकार निवडलेल्या न राशी घेऊन

येणाऱ्या त्यांच्या गुणाकारांचा योग य^{स-न} चा गुणक आहे.

ह्या योगाचें यो_३ ने अभिधान करा. यो_३ मधील एकंदर

पदांची संख्या घेऊन आहे.

अंत्यपद य- विरहित असून ते क_१, क_२, क_३.....

आणि क_स यांचा गुणाकार आहे. त्याचें यो_३ ने अभिधान

करा.

आता, हा संपूर्ण गुणाकार य च्या अवरोहि घातांत

लिहिल्यास

(य + क_१)(य + क_२).....(य + क_स)

= य^स + (क_१ + क_२ + क_स)य^{स-१}

+ (क_१क_२ + क_१क_३ +) य^{स-२}

+ (क_१क_२क_३ + क_१क_२क_४ +) य^{स-३}

+

+ (क_१क_२क_३.....क_न +) य^{स-न}

+

$$+ (क, क_1, क_2, \dots, क_{स-1}, + \dots) य + (क, क_1, क_2, \dots, क_s) \\ = य^स + यो, य^{स-1} + यो_1, य^{स-2} + \dots + यो_n, य^{स-n} \\ + \dots + यो_{स-1}, य + यो_s$$

११.२१ घरील अनुच्छेदांत क, क_१, क_२, क_स ह्या राशी प्रत्येकी क च्या समान घ्या.

म्हणजे यो_१, यो_२, यो_३, यो_न, यो_स यांच्या अर्हा क्रमशः सच, क, सच, क^२, सच, क^३, सच, क^न, सच, क^स होतात.

म्हणून (य + क) च्या समान स द्विपद अवयवांचा गुणाकार

$$(य + क)^स = य^स + सच, य^{स-1} + सच, क य^{स-2} + \dots + यच, क^{स-1} य + क^स$$

घरील फलांत एकंदर पदांची संख्या (स + १) आहे हे सहज दिसून येईल.

वर दिलेल्या (य + क)^स च्या विस्ताराला घन पूर्णांक घातांचा द्विपद विस्तार म्हणतात.

११.२२ आता (य + क)^स आणि त्याचा विस्तार यांतील य आणि क यांचे व्यतिहरण केले तर

$$(क + य)^स = क^स + सच, य क^{स-1} + सच, य^२ क^{स-2} + \dots + सच, य^{स-1} क + य^स \dots \dots (१)$$

ह्या विस्ताराचे निरीक्षण केले तर तो य च्या आरोही घातांत आहे असे दिसून येईल.

(१) मध्ये क = १ ठेवल्यास

$$(१ + य)^स = १ + सच, य + सच, य^२ + सच, य^३ + ... + सच, य^n + ... + सच, य^{स-१} + य^स$$

(१ + य)^स च्या विस्तारांत सच, सच, सच,

यांना द्विपद गुणक म्हणतात.

प_{न+१} ने सामान्य पदाचे अभिव्यक्ति केल्यास

$$प_{न+१} = सच, य^n$$

$$= \frac{स(स-१)(स-२).....(स-न+१)}{१ \times २ \times ३..... न} य^n$$

$$= \frac{स}{न} \frac{स-१}{स-न} य^n$$

यावरून

$$(१ + य)^स = १ + सच + \frac{स(स-१)}{२} य^२ + \frac{स(स-१)(स-२)}{३} य^३$$

$$+ ... + \frac{स(स-१)(स-२).....(स-न+१)}{न} य^n$$

+ ... + य^स

हे अतिशय सरल रूप आहे.

आता, (य + १)^स साख्या स-घातीय द्विपद राशीचा विस्तार, तिचे रूपांतर ज्या द्विपद राशीचे आद्यपद १ आहे अशा स-घातीय द्विपद राशीत करून नंतर घर दिलेल्या

द्विपद प्रमेयाच्या सरलतम रूपाचा उपयोग करून काढतां येतें हें पुढील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— $(y+r)^n$ चा विस्तार काढा.

$$(y+r)^n = \left[y \left(1 + \frac{r}{y} \right) \right]^n$$

$$\frac{r}{y} = l \text{ घेऊन}$$

$$\begin{aligned} (y+r)^n &= y^n (1+l)^n \\ &= y^n [1 + {}^nC_1 l + {}^nC_2 l^2 + \dots + {}^nC_n l^n + \dots \\ &\quad \dots + {}^nC_n l^n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= y^n \left[1 + {}^nC_1 \frac{r}{y} + {}^nC_2 \frac{r^2}{y^2} + \dots \dots \dots \right. \\ &\quad \left. + {}^nC_n \frac{r^n}{y^n} + \dots + {}^nC_n \frac{r^n}{y^n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= y^n + {}^nC_1 r y^{n-1} + {}^nC_2 r^2 y^{n-2} + \dots \dots \dots \\ &\quad \dots + {}^nC_n r^n y^{n-n} + \dots + {}^nC_n r^n \end{aligned}$$

उदाहरण २—

$(y+k)^n$ चा विस्तार करा.

(११.२१) वरून

$$\begin{aligned} (y+k)^n &= y^n + {}^nC_1 k y^{n-1} + {}^nC_2 k^2 y^{n-2} + {}^nC_3 k^3 y^{n-3} \\ &\quad + {}^nC_4 k^4 y^{n-4} + {}^nC_5 k^5 y^{n-5} + {}^nC_6 k^6 y^{n-6} \\ &\quad + {}^nC_7 k^7 y^{n-7} + \dots \end{aligned}$$

$$= y^6 + 6ky^5 + 21k^2y^4 + 35k^3y^3 + 35k^4y^2 + 21k^5y + k^6$$

उदाहरण ३—

$(2y-r)^4$ चा विस्तार काढा.

$(y+k)^6$ शी $(2y-r)^4$ ची तुलना केल्यास असे दिसून येते की छिपदांत y ऐवजी $2y$ आणि k ऐवजी $-r$ आहे.

पहिल्या उदाहरणांप्रमाणे विस्तार केल्यास

$$\begin{aligned} (2y-r)^4 &= (2y)^4 + {}^4C_1 (-r) (2y)^3 \\ &\quad + {}^4C_2 (-r)^2 (2y)^2 + {}^4C_3 (-r)^3 (2y) \\ &\quad + {}^4C_4 (-r)^4 (2y)^0 \\ &= 16y^4 - 32ry^3 + 24r^2y^2 - 8r^3y + r^4 \end{aligned}$$

उदाहरण ४—

$(y+\sqrt{3})^4 + (y-\sqrt{3})^4$ याची अर्हा काढा.

$$\begin{aligned} &(y+\sqrt{3})^4 + (y-\sqrt{3})^4 \\ &= [y^4 + {}^4C_1 (\sqrt{3})y^3 + {}^4C_2 (\sqrt{3})^2y^2 + {}^4C_3 (\sqrt{3})^3y \\ &\quad + {}^4C_4 (\sqrt{3})^4] \\ &\quad + [y^4 + {}^4C_1 (-\sqrt{3})y^3 + {}^4C_2 (-\sqrt{3})^2y^2 \\ &\quad + {}^4C_3 (-\sqrt{3})^3y + {}^4C_4 (-\sqrt{3})^4] \\ &= 2y^4 + 2{}^4C_2 (\sqrt{3})^2y^2 + 2{}^4C_4 (\sqrt{3})^4 \\ &= 2y^4 + 12y^2 + 18 \end{aligned}$$

११.३ (य + क)^स च्या विस्तारांतील कोणतेहि पद काढणे.

$$(य + क)^स = य^स + सच, क य^{स-१} + \dots + सचन कन य^{स-n} \\ + \dots + सचस-१, क^{स-१} य + क^स$$

विस्तारांतील पहिलें पद य^स अथवा सच, य^स

दुसरें पद सच, क य^{स-१}

तिसरें पद सच, क^२ य^{स-२}

चवथें पद सच, क^३ य^{स-३}

.....

या पदांच्या निरीक्षणावरून असें दिसून येतें की

(१) च चा पादांक (suffix) पदांच्या क्रमांकापेक्षा १ ने कमी आहे.

(२) क चा घात च च्या पादांकासमान आहे.

(३) क आणि य यांच्या घातांचा योग द्विपदांच्या घातासमान आहे.

यावरून (त + १) च्या पदांचें अभिधान प_{त+१} ने केले तर

$$प_{त+१} = सचत कत य^{स-त}$$

११.३१ (१ + य)^स च्या विस्तारांत आरंभ आणि अंत यांपासून तसदूर असणाऱ्या पदांतील गुणक समान असतात.

$$(१ + य)^स = १ + सच, य + सच, य^१ + \dots + सचन य^n \\ + \dots + सचस-१, य^{स-१} + य^स$$

$(१+य)^{\text{व}}$ व्या विस्तारांत पदांची संख्या $(स+१)$ असते हें आपण पाहिलेंच आहे.

आरंभापासून त व्या पदांतील गुणक $= {}^{\text{व}}\text{च}_{त-१}$

अंतापासून त वें पद $=$ आरंभापासून $(स+२-त)$ वें पद.

म्हणून $(स+२-त)$ व्या पदांतील गुणक

$$= {}^{\text{व}}\text{च}_{स+१-त}$$

$$= {}^{\text{व}}\text{च}_{स-(स+१-त)}$$

$$= {}^{\text{व}}\text{च}_{त-१}$$

म्हणून आरंभाआणि अंत यांपासून समदूर असणाऱ्या पदांतील गुणक समान असतात.

११.४ कांदी सोडविलेली उदाहरणे.

उदाहरण १— $(य-२)^४$ व्या विस्तारांतील चवथें पद काढा.

$(य-२)^४$ व्या विस्तारांतील चवथें पद

$$= {}^4\text{च}_३ (-२)^३ य^३$$

$$= -\frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३} २^३ य^३$$

$$= -२०२^३ य^३$$

उदाहरण २— $(य-क)^{११}$ व्या विस्तारांतील १३ वें पद काढा.

$(य-क)^{११}$ व्या विस्तारांतील १३ वें पद

$$= {}^{११}\text{च}_{१२} (-क)^{१२} य^१$$

$$= {}^{११}\text{च}_{१२} क^{१२} य^१$$

$$= \frac{16 \times 14 \times 12 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \text{ क}^{11} \text{ य}^4$$

$$= 1620 \text{ क}^{12} \text{ य}^4$$

उदाहरण ३— $\left(y^2 - \frac{3}{y}\right)^{14}$ च्या विस्तारांत y^{14} चा गुणक काढा.

समजा y^{14} , $(t+1)$ व्या पदांत आहे.

$$\text{आता, } \left(y^2 - \frac{3}{y}\right)^{14} = y^{28} \left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14}$$

आता, $\left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14}$ चा विस्तार करून त्यांतील

प्रत्येक पदास y^{28} ने गुणा.

$$p_{t+1} = y^{28} \left[\left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14} \text{ च्या विस्तारांतील} \right. \\ \left. (t+1) \text{ वे पद} \right]$$

$$= y^{28} \times {}^{14}C_t \left(-\frac{3}{y^3}\right)^t$$

$$= (-3)^t \times {}^{14}C_t \times y^{28-3t}$$

या पदांत y चा घात १८ आहे असे आपण गृहीत घरले आहे.

$$\text{म्हणून } 28 - 3t = 18$$

$$\text{फिरा } t = 10$$

$$\begin{aligned}\text{इष्ट गुणक} &= (-2)^4 \times 1^4 \text{च}, \\ &= 2^4 \times 1^4 \text{च},\end{aligned}$$

$$= \frac{11 \times 14 \times 18 \times 22 \times 26}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 110464$$

उदाहरण ४— $\left(y + \frac{x}{y^2}\right)^n$ च्या विस्तारांत y^n चा गुणक काढा.

समजा, y^n , $\left(y + \frac{x}{y^2}\right)^n$ च्या विस्तारांतील $(n+1)$

व्या पदांत आहे.

$$\text{आता } \left(y + \frac{x}{y^2}\right)^n = y^n \left(1 + \frac{x}{y^3}\right)^n$$

$$\left(y + \frac{x}{y^2}\right)^n \text{ च्या विस्तारांत}$$

$$p_{n+1} = y^n \left[\left(1 + \frac{x}{y^3}\right)^n \text{ च्या विस्तारांत } p_{n+1}, \text{ चे पद} \right]$$

$$= y^n \times \text{सचट} \left(\frac{x}{y^3}\right)^n$$

$$= \text{सचट } y^{n-3n} \times x^n$$

या पदांत y चा घात n आहे हे आपण गृहीत धरले आहे.

$$\text{मध्यम स-३ठ=त}$$

$$\text{किंवा ठ} = \frac{\text{स-त}}{३}$$

$$\text{मध्यम इष्ट गुणक} = \frac{\text{स-त}}{३} \text{ ग } \frac{\text{स-त}}{३}$$

$$= \frac{\text{स}}{\left[\frac{\text{स-त}}{३} \right] \left[\frac{\text{स+त}}{३} \right]} \text{ ग } \frac{\text{स-त}}{३}$$

प्रश्नसंग्रह १६

(१) विस्तार करा—

$$(य-३)(य+४)(य-८)(य+७)$$

(२) (क) $(य-२)(य+३)(य-५)(य+९)$ या गुणाकारांतील $य^२$ चा गुणक काढा.

(ख) $(य+१)(य+२)(य+३)(य-४)(य-५) \times (य-६)$ या गुणाकारांतील $य^२$ चा गुणक काढा.

(३) विस्तार करा—

$$(१) (य+२)^५; \quad (२) (२य+३२)^४;$$

$$(३) (५-४य)^२; \quad (४) \left(१-\frac{१}{य}\right)^२$$

$$(५) \left(y^2 + \frac{3k}{y}\right)^n; (६) \left(3y - \frac{4}{y^2}\right)^n$$

५४) खालील द्विपद विस्तारांतील इष्ट पदें लिहून त्यांना सरळ रूप द्या.

(अ) $(3k^2 - 7y^2)^{10}$ यांमधील ५वें पद

(आ) $\left(\frac{k}{y} + \frac{y}{k}\right)^{11}$ यांमधील ९वें पद

(इ) $\left(\frac{y}{k} - \frac{k}{y}\right)^{10}$ यांमधील ४थें पद

[फलकसूत्र १८८८

(ई) $(2y^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{3}})^{10}$ यांमधील १९ वें पद

[फलकसूत्र १८७०

५५) $(y - y^2)^{10}$ च्या विस्तारांतील y^{14} चा गुणक काढा.

[फलकसूत्र १९२६

५६) $(k^2 - 2xy^2)^{10}$ च्या विस्तारांतील y^{10} आणि y^{14} यांचे गुणक काढा.

[फलकसूत्र १८७६

५७) $(y - 2x)^{12}$ च्या विस्तारांतील y^{11} चा गुणक काढा.

[फलकसूत्र १८८३

५८) $\left(y + \frac{x^2}{y^2}\right)^{10}$ च्या विस्तारांतील $\frac{1}{y^2}$ चा गुणक काढा.

५९) $\left(3y - \frac{1}{3y}\right)^{100}$ च्या विस्तारांतील y^{24} चा गुणक काढा.

(१०) $\left(y - \frac{3x^2}{y^2}\right)^{2s}$ च्या विस्तारांतील y^s चा गुणक काढा.

(११) $(y - y^{-1})^{2s}$ च्या विस्तारांतील $(2s+1)$ ये पद काढा.

(१२) $(1+y)^{2s}$ च्या विस्तारांतील y^s चा गुणक $(1+y)^{2s-1}$ च्या विस्तारांतील y^s च्या गुणकाच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.

(१३) $(1+y)^{2s}$ च्या विस्तारांतील मध्यपद $1 \times 2 \times 3 \dots (2s-1) 2s \times y^s$ आहे हे दाखवा.

स

(१४) $(x+y)^{2s}$ च्या विस्तारांतील मध्यपद काढा.

(१५) $\left(\frac{3}{y} - \frac{y}{3}\right)^{11}$ च्या विस्तारांतील मध्यपद काढा.

(१६) $\left(y^2 - \frac{3}{y^2}\right)^{10}$ च्या विस्तारांतील y -विरहित पद काढा.

(१७) $\left(y + \frac{1}{y}\right)^{2s}$ च्या विस्तारामधी y -विरहित पद काढा.

(१८) $\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)^{12}$ च्या विस्तारामधील y -विरहित पद काढा.

(१९) $(२य + \frac{१}{३य^२})^२$ च्या विस्तारांतील य-विरहित पद काढा.

(२०) $(१ + य)^३$ च्या विस्तारांत $(२न + १)$ व्या पदाचा गुणक $(न + २)$ व्या पदाच्या गुणकासमान असल्यास न ची अर्ही काढा.

[पाटणा १९३०]

(२१) जर $(१ + य)^{२४+१}$ च्या विस्तारांत $य^n$ आणि $य^{२४+१}$ यांचे गुणक समान असतील तर न ची अर्ही काढा.

(२२) $(१ + य)^{२४}$ च्या विस्तारांतील, मध्यपदांतील गुणक $(१ + य)^{२४-१}$ च्या विस्तारांतील दोन मध्यपदांतील गुणकांच्या योगासमान आहे हें दाखवा.

[फलकत्ता १९१८]

(२३) $(१ + य)^{८+४}$ मध्ये ८ आणि ४ हे धन पूर्णांक असल्यास $य^८$ आणि $य^४$ यांचे गुणक समान असतात हें सिद्ध करा.

(२४) $(१ + य)^{२८}$ च्या विस्तारांत न व्या पदांतील गुणक $(न + ४)$ व्या पदांतील गुणकासमान आहे तर न ची अर्ही काढा.

११.५ द्विपद प्रमेयाचा उपयोग करून त्रिपदाचा विस्तार करता येतो.

उदाहरण— $(१ + य + य^२)^४$ चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करा.

$(य + य^२)$ हें एकच पद मानून आणि द्विपद प्रमेयाचा उपयोग करून

$$[1 + (y + y^2)]^n$$

$$= 1 + {}^nC_1(y + y^2) + {}^nC_2(y + y^2)^2$$

$$+ {}^nC_3(y + y^2)^3 + \dots + (y + y^2)^n$$

$$= 1 + {}^nC_1 y(1 + y) + {}^nC_2 y^2(1 + y)^2$$

$$+ {}^nC_3 y^3(1 + y)^3 + \dots + y^n(1 + y)^n$$

$$\text{आता } (1 + y)^2, (1 + y)^3, (1 + y)^4, \dots, (1 + y)^n$$

यांचा द्विपद प्रमेयाने विस्तार करून आणि य ज्या आरोही घातांत पदांची पुनर्रचना करून

$$(1 + y + y^2)^n = 1 + {}^nC_1 y + ({}^nC_1 + {}^nC_2) y^2$$

$$+ ({}^nC_1 + 2{}^nC_2 + {}^nC_3) y^3 + \dots$$

११.६ $(1 + y)^n$ ज्या विस्तारांतील संख्येने महत्तम पद काढणे.

$(1 + y)^n$ ज्या विस्तारांतील n थे आणि $(n + 1)$ थे पद लिहा.

$$P_n = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n-1)} y^n$$

$$P_{n+1} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} y^{n+1}$$

$$\text{म्हणून } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{s-n+1}{n} y$$

यावरून $P_{n+1} > P_n$ हा संबंध द्या असल्यास

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} 1 \text{ असावयास पाहिजे.}$$

$$\text{म्हणून } \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{s-n+1}{n} \text{ य}$$

$$\text{म्हणून } \frac{s-n+1}{n} \times y \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} 1 \text{ असावयास पाहिजे.}$$

$$\text{किंवा } (s+1) y \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} n(1+y)$$

$$\text{म्हणून } n \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} \frac{s+1}{1+y} \times y \text{ असावयास पाहिजे.}$$

$$\text{किंवा } n \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} \frac{s+1}{1+y} \text{ य असल्यास } p_{n+1} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} p_n \text{ हा}$$

इए संबंध सिद्ध होतो.

प्रकार १ ला. समजा $\frac{s+1}{1+y} \times y$ ही राशि त या पूर्णांका-
समान आहे.

$$\text{म्हणून } n \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} t \text{ असेल तदनुसार } p_{+1} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} p_n$$

(ग) आता न च्या, १ पासून त-१ पर्यंत सर्व अर्ही
वेतल्यास न त पेक्षा लहान असतो म्हणून न च्या, १, २, ३,
त-१ या सर्व अर्हीसाठी $p_{n+1} > p_n$

म्हणून $p_t > p_{t-1} > p_{t-2} \dots > p_3 > p_2 > p_1$
 p_t हे पद $p_1, p_2, p_3 \dots p_t$ यांपैकी महत्तम पद आहे.

(आ) आता $n = t$ या अर्हेसाठी

$$p_{t+1} = p_t$$

(इ) आता, n च्या $(t+1)$ पासून स पर्यंत सर्व अर्हा घेतल्यास n त पेक्षा अधिक असतो. म्हणून n च्या $(t+1)$ पासून स पर्यंत सर्व अर्हासाठी

$$p_{n+1} < p_n$$

$$\text{म्हणून } p_{t+1} > p_{t+2} > p_{t+3} > \dots > p_{n+1}$$

$\therefore p_{t+1}, p_{t+2}, \dots, p_{n+1}$ या पदांपैकी p_{t+1} हे पद महत्तम आहे.

यावरून जर $\frac{n+1}{1+y}$ य ही राशि t या पूर्णांकासमान

असेल तर p_t आणि p_{t+1} ही दोन पदे संख्येने महत्तम असून समान असतात.

प्रकार २ रा. समजा $\frac{(n+1)}{1+y}$ य हा एक भिन्न आहे.

त्यांतील पूर्णांक अंगाचें थ ने अभिधान करा.

अर्थात् $n \geq \frac{(n+1)}{1+y}$ थ + लघ्वांश भिन्न असेल

$$\text{तदनुसार } p_{n+1} > p_n$$

(अ) n च्या १ पासून स पर्यंत सर्व अर्हासाठी n ,

$\frac{s+1}{1+y}$ य पेशा लहान असतो.

म्हणून न च्या १, २, ३....., थ या सर्व अर्हासाठी

$$p_{n+1} > p_n$$

अर्थात् $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{th} < p_{th+1}$

म्हणून $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{th+1}$ या पदांपैकी p_{th+1} हे महत्तम पद आहे.

(आ) थ नंतरची न ची अर्हा थ+१ आहे.

आता न च्या (थ+१) पासून स पर्यंत सर्व अर्हा-
करिता

$$n > th + लघ्वांशभिन्न.$$

यावरून न च्या थ+१, थ+२,.....स या अर्हाकरीता

$$p_{n+1} < p_n$$

म्हणून $p_{th+1} > p_{th+2} > p_{th+3} > \dots > p_{s+1}$

अर्थात् $p_{th+1}, p_{th+2}, p_{th+3}, \dots, p_{s+1}$ यांपैकी
 p_{th+1} हे महत्तम पद आहे.

म्हणून $\frac{s+1}{1+y} \times y$ हा भिन्न असल्यास आणि त्याचा

पूर्णांक भाग थ च्या असल्यास p_{th+1} हे पद संख्येने
महत्तम असते.

उदाहरण— $y = \frac{1}{3}$ असल्यास $(1+y)^s$ च्या विस्तार-
रांतील महत्तम पद काढा.

$$P_n = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} (4y)^{n-1}$$

$$P_{n+1} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} (4y)^n$$

$$\text{आता } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n-1}{n} (4y)$$

$$= \frac{10-n}{n} (4y)$$

$$\text{आता } y = \frac{1}{3} \text{ ठेकते}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{10-n}{n} \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{आता } \frac{10-n}{n} \cdot \frac{4}{3} \geq 1 \text{ तदनुसार } P_{n+1} \geq P_n$$

$$\text{किंवा } n \leq 6\frac{2}{3} \text{ तदनुसार } P_{n+1} \geq P_n$$

तेव्हा न उदा १, २, ३, ..., ५, ६ या अर्धांकरीता
 $n < 6\frac{2}{3}$

म्हणून $P_{n+1} > P_n$

अर्थात् $P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_5 < P_6 \dots (ल)$

असतो; आणि स विषम असल्यास

$$s_{चस-1}; \text{ आणि } s_{चस+1}$$

हे महत्तम गुणक असून समान असतात.

११.८ द्विपद प्रमेयाची सिद्धता
स धन पूर्णांक असल्यास

$$(य + क)^s = य^s + सच, कय^{स-1} + सच, क^2 य^{स-2} + \dots$$

$$+ सच, क^n य^{स-n} + \dots + सच, क^{स-1} य + क^s$$

हें गणितीय अनुमानाच्या पद्धतीने खाली सिद्ध करून दाखविलें आहे.

जेव्हां $s=1$ तेव्हां

$$य + क = य + क \quad \dots \dots \dots (अ)$$

म्हणून $s=1$ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

जेव्हां $s=2$ तेव्हां (अ) चा उपयोग करून

$$(य + क)^2 = (य + क) (य + क)$$

$$= य^2 + २कय + क^2$$

$$= य^2 + २च, क \times य + २च, क^2 \dots \dots (आ)$$

याप्रमाणे $s=2$ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

जेव्हां $s=3$ तेव्हां (आ) चा उपयोग करून

$$(य + क)^3 = (य^३ + {}^१च, कय + {}^२च, क^२) (य + क)$$

$$= य^३ + {}^१च, कय^२ + {}^२च, क^२य$$

$$+ कय^२ + {}^२च, क^२य + {}^१च, क^३$$

$$= य^३ + ({}^१च, + १) कय^२$$

$$+ ({}^१च, + {}^२च,) क^२य + {}^१च, क^३$$

$$= य^३ + {}^३च, कय^२ + {}^३च, क^२य + {}^३च, क^३$$

$$= य^३ + ३कय^२ + ३क^२य + क^३$$

यावरून स=३ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें.

प्रत्येक अनुमान काढतांना त्याच्या पूर्वीच्या अनुमानाचा उपयोग केला आहे, ही गोष्ट लक्षांत ठेवली पाहिजे.

आता, स च्या म या विशिष्ट अर्हेकरिता द्विपदप्रमेय सिद्ध आहे असे समजा.

म्हणून

$$(य + क)^म = य^म + {}^मच, क \times य^{म-१} + {}^मच, \times क^२य^{म-२} + \dots$$

$$+ {}^मच, क^{न-१} य^{म-न+१}$$

$$+ {}^मच, क^न य^{म-न} + \dots + क^म$$

दोन्ही पक्षास (य + क) ने गुणून

$$\text{वाम पक्ष} = (य + क)^{म+१}$$

दक्षिण पक्ष

$$= [य + क] [य^म + मच, कय^{म-१} + मच, क^१ य^{म-१} \\ + \dots + मच_{न-१}, क^{न-१} य^{म-न+१} \\ + मच_n क^न य^{म-न} + \dots + क^म]$$

$$= [य^{म+१} + मच, कय^म + मच, क^१ य^{म-१} + \dots \\ + मच_{न-१}, क^{न-१} य^{म-न+१} \\ + मच_n क^न य^{म-न+१} + \dots + \\ + मच_m, क^म य^१ + क^म य] \\ + [कय^म + मच, क^१ य^{म-१} + \dots + \\ + मच_n क^न य^{म-न+१} \\ + \dots + मच_m, क^म य + क^{म+१}] \\ = य^{म+१} + (मच, + १) कय^म + (मच, + मच,) क^१ य^{म-१} + \dots \\ + (मच_n + मच_{न-१}) क^न य^{म-न+१} + \dots + क^{म+१}$$

पण न ज्या सर्व अर्थांकरितां

$$मच_n + मच_{न-१} = म^{+१} च_n$$

$$\text{म्हणून दक्षिण पक्ष} = य^{म+१} + म^{+१} च, कय^म \\ + म^{+१} च, क^१ य^{म-१} + \dots \\ + म^{+१} च_n क^न य^{म-न+१} + \dots \\ + म^{+१} च_m क^म य + क^{म+१}$$

परील पदसंहति $(य + क)^{म+१}$ च्या त्रिपद विस्तार आहे.

तेव्हां स च्या पखाद्या विशिष्ट अर्हेकरिता हें द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें ही आपली मानना सत्य असल्यास स च्या आगामी उच्चतर अर्हेकरिताहि द्विपद प्रमेय सिद्ध होतें असें दिसून येतें.

आता, $s=1$ असल्यास द्विपद प्रमेय सिद्ध आहे हें आपण पाहिलेंच आहे.

म्हणून $s=2$ असल्यास तें प्रमेय सिद्ध आहे.

आता, $s=2$ असल्यास तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून $s=3$ असल्यास द्विपदप्रमेय सिद्ध आहे.

आता, $s=3$ करिता तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून $s=4$ करिता तें सिद्ध आहे.

आता $s=4$ करिता तें प्रमेय सिद्ध आहे म्हणून $s=5$ करिता तें सिद्ध आहे.

अशा परंपरेने स च्या सर्व घन पूर्णांक अर्हांकरिता द्विपद प्रमेय सिद्ध आहे.

११.९ घरील विस्तारांत य ला निरनिराळ्या अर्हां दिल्यास अनेक ऐकात्म्ये निष्पन्न होतात.

टीप — अन्यथा निर्देश केल्याविना $च_1$ ने $च_2$ चें अभिधान होतें असें समजावें.

ऐकात्म्य १— गुणकांचा योग—
(१+य)^स

$$=च_0 + च_1 य + च_2 य^2 + \dots + च_n य^n + \dots + च_s य^s$$

$$च_0 = 1, \text{ आणि } च_s = 1$$

आता य ऐवजी १ चा आदेश करा.

म्हणजे $2^s = च_० + च_१ + च_२ + ... + च_n + ... + च_s$
 = सर्व गुणकांचा योग.

म्हणून $च_१ + च_२ + च_३ + ... + च_n + ... + च_s = 2^s - 1$

पेकात्म्य २—

$(१ + य)^s$ च्या विस्तारांतील सम पदांतील गुणकांचा योग विषम पदांतील गुणकांच्या योगासमान असतो.

$(१ + य)^s = च_० + च_१ य + च_२ य^२ + ... + च_s य^s$
 या फलांत $य$ पेवजी -१ ठेवा.

म्हणजे $० = च_० - च_१ + च_२ - च_३ + ... + (-१)^s च_s$

म्हणून $च_० + च_१ + च_२ + ... = च_१ + च_३ + च_५ + ...$

आता $च_० + च_२ + च_४ + ... = च_१ + च_३ + च_५ + ...$

$$= \frac{१}{२} [\text{सर्व गुणकांचा योग}]$$

$$= \frac{१}{२} + 2^s$$

$$= 2^{s-1}$$

११.९१ सोडविलेली उदाहरणे

उदाहरण १—

$च_१ + २च_२ + ३च_३ + ... + nच_n + ... + sच_s$
 $= s \times 2^{s-1}$ हें दाखवा.

$$\begin{aligned}
 & \text{च}_1 + 2\text{च}_2 + 3\text{च}_3 + \dots + n\text{च}_n + \dots + s\text{च}_s \\
 &= \left[\text{च} + \frac{2 \times \text{च} (\text{च} - 1)}{1 \times 2} + \frac{3\text{च}(\text{च} - 1)(\text{च} - 2)}{1 \times 2 \times 3} \right. \\
 & \quad \left. \dots + \frac{n | \text{च}}{n | \text{च} - n} + \dots + \text{च} \right] \\
 &= \text{च} \left[1 + (\text{च} - 1) + \frac{(\text{च} - 1)(\text{च} - 2)}{1 \times 2} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|\text{च} - 1|}{|\text{च} - 1| |\text{च} - 1 - (n - 1)|} + \dots + 1 \right] \\
 &= \text{च} [\text{च}^{-1}\text{च}_0 + \text{च}^{-1}\text{च}_1 + \text{च}^{-1}\text{च}_2 + \dots + \text{च}^{-1}\text{च}_{n-1} \\
 & \quad + \dots + \text{च}^{-1}\text{च}_{\text{च}-1}] \\
 &= \text{च} \times 2^{\text{च}-1}
 \end{aligned}$$

उदाहरण २—

$$\begin{aligned}
 \text{सच.} &= \frac{1}{2} \text{सच}_1 + \frac{1}{3} \text{सच}_2 - \dots \\
 & \dots + \frac{(-1)^{\text{स}} \text{सचस}}{\text{स} + 1} = \frac{1}{\text{स} + 1} \quad \text{है दाखवा.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{सच.} &= \frac{1}{2} \text{सच}_1 + \frac{1}{3} \text{सच}_2 - \dots + (-1)^{\text{स}} \frac{1}{\text{स} + 1} \times \text{सचस} \\
 &= 1 - \frac{\text{स}}{2} + \frac{\text{स}(\text{स} - 1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + (-1)^{\text{स}} \frac{1}{\text{स} + 1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[(s+1) - \frac{(s+1)(s)}{1 \times 2} + \frac{(s+1)s(s-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + (-1)^n \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[s+1 - s+1 + s+1 - \dots + (-1)^n s+1 \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} \left[1 - s+1 + s+1 - s+1 + \dots + (-1)^n s+1 \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} [1-1]^{n+1}$$

$$= \frac{1}{s+1}$$

उदाहरण ३— जर $(1+x)^n$ का विस्तार x, x^2, x^3, \dots, x^n के गुणक असतोड तर

$$1 + n x + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} x^k + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!} x^n$$

$$= \frac{1 - (1+x)^{n+1}}{1-x} \text{ हे दाखवा.}$$

$$1 + n x + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} x^k + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[3(s+1)ch_0 + 3^2(s+1)\frac{ch_1}{2} \right. \\ \left. + \frac{3^3(s+1)ch_2}{3} + \dots + 3^{s+1}ch_s \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[\left\{ 1 + 3(s+1) + \frac{3^2(s+1)s}{1 \times 2} \right. \right. \\ \left. \left. 3^3 \frac{(s+1)(s)(s-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + 3^{s+1} \right\} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} [s+1, ch_0 + s+1, ch_1 \times 3 + \\ s+1, ch_2 \times 3^2 + \dots + s+1, ch_{s+1} \times 3^{s+1} - 1]$$

$$= \frac{1}{s+1} [(1+3)^{s+1} - 1]$$

$$= \frac{3^{s+1} - 1}{s+1}$$

उदाहरण ४— जर $ch_0, ch_1, ch_2, \dots, ch_s$ हे
 $(1+y)^s$ च्या विस्तारांतील गुणक असतील तर
 $ch_0, ch_1 + ch_2, ch_2 + ch_3 + \dots + ch_{s-1}, ch_s$

$$= \frac{12s}{(s-1)(s+1)}$$

आहे हे दाखवा.

$$\text{आता } (1+y)^n = \text{च.} + \text{च.}y + \text{च.}y^2 + \text{च.}y^3 + \dots + \text{च.}y^n + \dots + \text{च.}y^n \dots \dots \dots (न)$$

य ऐवजी $\frac{1}{y}$ ठेवा

$$\text{म्हणजे } \left[1 + \frac{1}{y}\right]^n = \text{च.} + \frac{\text{च.}}{y} + \frac{\text{च.}}{y^2} + \frac{\text{च.}}{y^3} + \dots + \frac{\text{च.}}{y^n} + \dots + \frac{\text{च.}}{y^n} \dots \dots \dots (आ)$$

(न) आणि (आ) यांचा गुणाकार करून

$$\begin{aligned} & \frac{(1+y)^{2n}}{y^n} \\ &= [\text{च.} + \text{च.}y + \text{च.}y^2 + \dots + \text{च.}y^n + \dots + \text{च.}y^n] \\ & \times \left[\text{च.} + \frac{\text{च.}}{y} + \frac{\text{च.}}{y^2} + \dots + \frac{\text{च.}}{y^n} + \dots + \frac{\text{च.}}{y^n} \right] \dots \dots \dots (१) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{पण } \frac{(1+y)^{2n}}{y^n} \\ &= \frac{1}{y^n} [{}^1\text{च.} + {}^2\text{च.}y + {}^3\text{च.}y^2 + \dots + {}^n\text{च.}y^{n-1} + \dots + {}^{n+1}\text{च.}y^n + \dots + {}^{2n}\text{च.}y^{n-1}] \end{aligned}$$

(१) हे ऐकान्य असल्यामुळे $\frac{(1+y)^{2n}}{y^n}$ च्या

विस्तारांतील विशिष्ट घात असलेल्या y चा गुणक (६) च्या दक्षिण पक्षांतील तोच घात असलेल्या गुणकासमान होईल.

आता $y, y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_3 + y_4, \dots$

हा द्वष्ट योग (६) च्या दक्षिण पक्षांत y चा किंवा

$\frac{1}{y}$ चा गुणक असून तो $\frac{(1+y)^{2s}}{y^s}$ च्या विस्तारांतील y

च्या किंवा $\frac{1}{y}$ च्या गुणकासमान होतो.

म्हणून $y, y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_3 + y_4, \dots + y_{s-1}, y_s$

$$= {}^{2s}C_{s-1}$$

$$= \frac{|2s|}{|s-1| |s+1|}$$

प्रश्नसंग्रह १७

- (१) $(1+y+y^2)^n$ च्या विस्तारांतील y^n चा गुणक काढा.
- (२) $(1+2y+3y^2)^n$ च्या विस्तारांतील y^n असलेले पद काढा.
- (३) $(2+\sqrt{y}-y)^n$ च्या विस्तारांतील y^n चा गुणक काढा.

(४) y आणि r यांच्या यथानिर्दिष्ट अर्हा घेऊन खालील द्विपद विस्तारांतील महत्तम पद काढा.

(१) $y = 3; r = 4; (2y - r)^{10}$

(२) $y = 4; r = 5; (y + r)^{10}$

(३) $y = 3; r = 5; (y + r)^{10}$

(५) $(1 + y)^{32}$ च्या विस्तारांतील महत्तम पदांतच महत्तम द्विपद गुणक असण्यासाठी y च्या अर्हाच्या सीमा काढा.

(६) y च्या दत्त अर्हा घेऊन खालील विस्तारांतील महत्तम पद काढा.

(१) $(1 + y)^{11}$, जेव्हा $y = \frac{1}{2}$

(२) $(1 - \frac{y}{2})^{14}$, जेव्हा $y = \frac{3}{2}$

(३) $(1 + 2y)^{20}$, जेव्हा $y = \frac{3}{2}$

(४) $(2 - \frac{y}{4})^{10}$, जेव्हा $y = \frac{8}{5}$

खालील उदाहरणांत [७ ते १४], $(1 + y)^n$ च्या विस्तारांतील गुणकांचे $च_0, च_1, च_2, \dots, च_n$ यांनी अभिधान केलें आहे तर

(७) $च_0 + २च_1 + ३च_2 + \dots + (n + १)च_n$ ची अर्हा काढा.

$$(८) \frac{च_1}{च_0} + \frac{२च_२}{च_१} + \frac{३च_३}{च_२} + \dots + \frac{सच_स}{च_{स-१}} = \frac{स(स+१)}{२}$$

आहे हें दाखवा.

$$(९) (च_० + च_१)(च_१ + च_२) \dots (च_{स-१} + च_स) \\ = \frac{च_० च_१ च_२ \dots च_स (स+१)^स}{|स|}$$

आहे हे दाखवा.

$$(१०) च_० च_१ + च_१ च_२ + \dots + च_{स-१} च_स \\ = \frac{|२स|}{|स-२| |स+२|}$$

आहे हें दाखवा.

$$(११) च_० च_न + च_१ च_{न+१} + \dots + च_{स-न} च_स \\ = \frac{|२स|}{|स-न| |स+न|}$$

आहे हें दाखवा.

$$(१२) च_०^२ - च_१^२ + च_१^२ - च_२^२ + \dots + (-१)^स च_स^२ = ० \\ किंवा = \frac{(-१)^स |स|}{(|३|)^२} \quad \text{आहे हें दाखवा.}$$

$$(१३) च_० + \frac{च_१}{२} + \frac{च_२}{३} + \dots + \frac{च_स}{स+१} = \frac{२^{स+१} - १}{स+१}$$

आहे हैं दाखवा.

$$(१४) \quad २च. + ५च. + ८च. + \dots + (३स + २)चस \\ = (३स + ४)२स - १ \quad \text{आहे हैं दाखवा.}$$

$$(१५) \quad (१ + य)^{म+स} = (१ + य)^म (१ + य)^स$$

हैं ऐकात्म्य उपयोगांत आणून

$$म+सचन = मचन + मचन-१सच. + \dots + मचन-सच. + \dots + सचन$$

आहे हैं दाखवा.

प्रकरण चारार्वें

द्विपद प्रमेय

कोणताहि घात

१२.१ स हा धन पूर्णांक असल्यास

$$(1+y)^s = 1 + {}^sC_1 y + {}^sC_2 y^2 + \dots + {}^sC_n y^n + \dots + y^s$$

$$\text{किंवा} \quad = 1 + s y + \frac{s(s-1)}{1 \times 2} y^2 + \dots$$

$$+ \frac{\frac{s}{n}}{\frac{s-n}{s-n}} y^n + \dots + y^s$$

हे प्रमेय आपण मागील प्रकरणांतच सिद्ध केलें आहे.
या विस्तारासंबंधी खालील गोष्टी लक्षांत ठेवल्या पाहिजेत.

(१) विस्तारांतील पदांची संख्या परिमित असून ती $(s+1)$ आहे. आणि

(२) य च्या सर्व अर्हांकरिता हा विस्तार सत्य आहे.

$$1 + s y + \frac{s(s-1)}{1 \times 2} y^2 + \dots + y^s \text{ या सांत}$$

थेदीचें $(१+y)^४$ हें संक्षिप्त रूप आहे असें आपण मानूं शकतों किंवा

$$(१+y)^४ = १ + ४y + \frac{६(४-१)}{२} y^२ + \frac{६(४-१)(४-२)}{३} y^३ + \dots + y^४ \text{ ही पदसंहति .}$$

ही दोन समतुल्य आहेत हें आपण समजूं शकतों.

आता, द्विपदाचा घात फोणताहि असतांना द्विपद विस्तार फाटण्याची रीति देण्यापूर्वी घरील समानतेकडे लक्ष ठेवून, (१२.२) आणि (१२.३) ह्या अनुच्छेदांत सोडविलेल्या प्रश्नांचा अभ्यास करणें इष्ट आहे.

१२.२ $(१+४y + ८y^२ + ८y^३)$ ला $(१+२y)$ ने भागा.

$$\begin{array}{r|l|l} १+२y & १+४y+८y^२+८y^३ & १+२y+४y^२ \\ \hline & १+२y & \\ \hline & २y+८y^२ & \\ & + २y+४y^२ & \\ \hline & ४y^२+८y^३ & \\ & ४y^२+८y^३ & \\ \hline & ० & \\ & \times & \times \end{array}$$

यांत शेष शून्य असल्यामुळे भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

$$\text{म्हणून } \frac{1 + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य} = १ + २य + ४य^२$$

डावीकडच्या व्यंजकासमान उजवीकडची श्रेढी मांडता येते.

आता, १ ला $(१ - य)$ ने भागिल्यास भागाकार-क्रिया कधीच पूर्ण होत नाही. उलट भागाकारांत $१ + य + य^२ + य^३ + \dots \infty$ ही य च्या आरोही घातांतील श्रेढी येते.

दोन्ही वेळां प्रत्यक्ष भागाकार करण्याच्या पद्धतीचा आपण अवलंब केला. परंतु पहिल्या वेळीं य ची अर्धा कांदीहि असली तरी भागाकार पूर्ण येतो, आणि त्याचें प्रतिनिधान

$$य ची कोणतीहि अर्धा असली तरी \frac{१ + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य}$$

ने करता येतें.

दुसऱ्या वेळीं भागाकार अपूर्ण राहून भागाकारांत एक अनंत थंडी येते. या फलाचें निर्वचन (interpretation)

$$\text{कसें करावयाचें किंवा य च्या सर्व अर्द्यांसाठी } \frac{१}{१ - य} \text{ या}$$

व्यंजकाने $१ + य + य^२ + \dots \infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान होई शकतें काय असा प्रश्न उपस्थित होतो.

हा प्रश्न खालील रीतीने सोडविता येतो.

$$य = ३ घेतल्यास$$

$$\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{2}$$

आणि $1 + y + y^2 + y^3 + \dots \infty = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots \infty$

म्हणून $-\frac{1}{2}$ ने अर्थात् एका क्रण संख्येने

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots \infty$ चें अर्थात् एका असंख्य धन राशीचें प्रतिनिधान करावें लागेल. पण हें विसंगत आहे.

म्हणून य ज्या सर्व्थ अर्थाकरिता $\frac{1}{1-y}$ हें व्यंजक

$1 + y + y^2 + \dots \infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान करीत नाही हे स्पष्ट आहे.

दिलेल्या श्रेढीचें प्रतिनिधान एखाद्या व्यंजकानें होऊं शकतें किंवा नाही हें ठरविण्यासाठी दिलेल्या अनंत श्रेढीच्या पहिल्या स पदांचा योग काढून नंतर स ला असीमित वाढवून या योगाच्या आचरणाचें निरीक्षण करा.

आता, $1 + y + y^2 + \dots + y^{s-1} + \dots \infty$ ही

गुणोत्तर श्रेढी असल्यामुळे तिचा योग $= \frac{1-y^s}{1-y}$

या योगाचें योस ने अभिधान केल्यास

$$\text{योस} = \frac{1-y^s}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-y} - \frac{y^x}{1-y}$$

(अ) आता, y च्या अर्हा -1 आणि $+1$ यांमध्ये आहेत अर्थात् $-1 < y < 1$ असं समजा.

y चरील या निर्बंधाने (restriction) स जशी जशी उच्चतर अर्हा घेत जातो तशी तशी y^x ची अर्हा लघुतर होत जाते.

म्हणून $-1 < y < 1$, आणि स $\rightarrow \infty$ असल्यास

$$\frac{y^x}{1-y} \rightarrow 0$$

आणि म्हणून सीमांती $\left[\frac{1}{1-y} - \frac{y^x}{1-y} \right]$ याची अर्हा

$\frac{1}{1-y}$ च्या अतिनिकट येते.

यावरून y च्या $-1 < y < 1$ या अर्हाकरिता $1 + y + y^2 + y^3 + \dots$ या श्रेढीच्या स पदांचा योग स

सीमांतीत चाढविला असता जवळ जवळ $\frac{1}{1-y}$ च्या समान होतो.

y च्या अर्हेवर हा निर्बंध असतांनाच केवळ

$\frac{1}{1-y}$ ही लब्धि $1 + y + y^2 + y^3 + \dots \infty$ या

अनंत श्रेढीशी तुल्य पाहे असं आपण घेऊ शकतो किंवा

$1 + y + y^2 + \dots \infty$ या श्रेढीचें प्रतिनिधान $\frac{1}{1-y}$ ह्या व्यंजकाने करतां येतें.

म्हणून y च्या $-1 < y < 1$ या अर्हाकरिता $1 + y + y^2 + \dots \infty$ ही अंतंत श्रेढी $\frac{1}{1-y}$ फडे अभि-

सारी (convergent) आहे असें म्हणतात.

(आ) आता $y = -1$ पेक्षा लहान (उदाहरणार्थ $y = -0.5$) किंवा $+1$ पेक्षा मोठा (उदाहरणार्थ $y = 0.5$) आहे म्हणजेच $y > 1$ किंवा $y < -1$ आहे असे समजा.

$$1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1} = \frac{1}{1-y} - \frac{y^n}{1-y}$$

स जशी जशी उच्चतर अर्हा घेत जातो तशी तशी y^n चीहि अर्हा उच्चतर होत जाते म्हणून $\frac{y^n}{1-y}$ ची अर्हाहि

स घरोवरच वाढते.

आपण जशी जशी y ची अर्हा उच्चतर करूं तशी तशी $1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^{n-1}$ या श्रेढीची—

म्हणजेच $\left[\frac{1}{1-y} - \frac{y^n}{1-y} \right]$ या पदसंज्ञेची— अर्हा आणि

$\frac{1}{1-y}$ यामधील फरक अधिकाधिक होईल.

स सीमातीत वाढविला असतांना $1 + y + y^2 + \dots$ ह्या श्रेढीचा योग $\frac{1}{1-y}$ च्या निरुक्त येत नाही. म्हणून y

संख्येने १ पेक्षा मोठा असल्यास $\frac{1}{1-y}$ हे व्यंजक $1+y$
 $+y^2+\dots\infty$ या श्रेढीचे प्रतिनिधान करू शकत नाही.
 म्हणून $y > 1$ किंवा $y < -1$ या y च्या अर्हाकरिता
 आपण $\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+y^3+\dots\infty$ असे लिहू
 शकत नाही. अशा श्रेढींना अपसारी (divergent) श्रेढ्या
 म्हणतात.

१२.२२ चरील पर्यालोचनाने खालील फल निष्पन्न
 होतात.

$-1 < y < +1$ असल्यास $1+y+y^2+\dots+y^{n-1}$
 या श्रेढीचा योग $s \rightarrow \infty$ असतांना जवळजवळ $\frac{1}{1-y}$

च्या समान असतो. आणि सीमार्ती

$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\dots\infty \text{ अशी समता मांडतां}$$

येते. पण y संख्येने १ पेक्षा मोठा असल्यास

$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+y^3+\dots\infty \text{ ही समता}$$

लिहिता येत नाही.

१२.३ $(1+y)^{\frac{2}{3}}$ ची अर्हा मूळ क्रियेने (process of
 evolution) काढा.

$$(1+y)^{\frac{2}{3}} = [(1+y)^{\frac{1}{3}}]^2 = (1+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y^2+y^3)^2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^2 + 2x + \frac{x^3}{2}}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^2 + 2x + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^3}{2}$$

$$x^2 + 2x + 2x^2 + x^3$$

$$2x + 2x^2$$

$$2x + \frac{x^3}{2}$$

$$\frac{x^3}{2} + x^3$$

$$\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^3$$

$$-\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2}$$

$$-\frac{x^3}{2} - \frac{2x^3}{2} - \frac{2x^3}{2} + \frac{x^3}{2}$$

$$+ + + -$$

$$\frac{2x^3}{2} + \frac{2x^3}{2} - \frac{x^3}{2}$$

वरील पद्धतीने $(1+y)^2$ ची अर्हा काढण्याची क्रिया कधीच संपत नाही, उलट इष्ट फलांत प्रत्येक वेळीं एका पदाची भर पडते.

$$\text{म्हणून } (1+y)^2 = 1 + \frac{2}{2}y + \frac{2}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3 + \dots \infty$$

म्हणून य च्या दिलेल्या अर्हेंकरिता $(1+y)^2$ ची चढंशी (fairly) अचूक अर्हा काढावयाची असल्यास दक्षिण पक्षांतील अधिकाधिक पदं घ्याची लागतात.

$(1+y)^{\frac{2}{3}}$ च्या संवादी थेंढीच्या एखाद्या पदाचा गुणक ठरविण्याकरिता लागणारा नियम इष्ट पदांवरून ठरविणं जवळजवळ अशक्यच आहे.

१२४ $(1+y)^{\frac{2}{3}}$ सारख्या व्यंजकाचें प्रतिनिधान य च्या अर्हांकरिताच एका अनंत थेंढीने करिता येतं, हें मागील अनुच्छेदांत केलेल्या चर्चेवरून दिसून येईल.

आता स धनपूर्णांक नसतांना आणि य घर इष्ट निर्यध असतांना $(1+y)^{\frac{2}{3}}$ या व्यंजकाशीं समतुल्य असं द्विपद विस्ताराचें रूप कसं लिहावयाचें हा प्रश्न उपास्थित होतो.

याकरिता वर्गमूळ आणि भागाकाराच्या पद्धतींनी $(1+y)^{\frac{2}{3}}$ आणि $(1-y)^{-1}$ यांचे जे विस्तार काढले त्यांतील पदांची $(1+y)^{\frac{2}{3}}$ च्या संवादी पदांशीं तुलना करा.

$$\text{आता } (1+y)^s = 1 + sy + \frac{s(s-1)}{2} y^2 + \dots (1)$$

ही समता स च्या केवळ घनपूर्णांक अर्थाकरिता सत्य असते हे आपण सिद्ध केले आहे.

पुन्हा

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \infty [-1 < y < 1]$$

थोडेसे रूपांतर करून

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y} &= 1 + (-1)(-y) + \frac{(-1)(-2)}{2} (-y)^2 \\ &+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{3} (-y)^3 + \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{आणि } (1+y)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{3}{2}y + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2} y^2 + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{3} y^3 \\ &+ \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

आता (१) मध्ये $s = -1$ आणि y ऐवजी $-y$ ठेवा. म्हणजे

$$\frac{1}{1-y} = 1 + (-1)(-y) + \frac{(-1)(-2)}{2} (-y)^2$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{3} (-y)^3 + \dots\dots\dots(४)$$

पुन्हा (१) मध्ये स = $\frac{३}{२}$ ठेवा म्हणजे

$$(१+y)^{\frac{३}{२}} = १ + \frac{३}{२}y + \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२}-१)}{2}y^2$$

$$+ \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२}-१)(\frac{३}{२}-२)}{6}y^3 + \dots\dots\dots(५)$$

(२) आणि (४) तसेच (३) आणि (५) यांतील संवादी पदांची तुलना केली असतां असे दिसून येते की (१) या समतेंत

(अ) स = -१ आणि य ऐवजी -य यांचा प्रत्यक्ष आदेश केल्यास (४) या समतेंतील पदे मिळतात.

आणि (आ) स = $\frac{३}{२}$ ठेवल्यास (५) या समतेंतील पदे मिळतात.

भागाकार किंवा वगमूल काढण्याच्या प्रत्यक्ष-पद्धतीने किंवा $(१+y)^x$ च्या विस्तारांत इष्ट आदेश करून येणारीं फलें परस्पराशीं जुळतात. यावरून असा निष्कर्ष निघतो की सच्चा अर्हा श्रृंखला किंवा भिन्न असल्यास आणि य च्या अर्हावर

विशिष्ट निर्वंध (restriction) असल्यास $(1+y)^x$ चा विस्तार

$$1 + xy + \frac{x(x-1)}{2} y^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} y^3 + \dots \infty$$

या रूपांत करतां येण्याचा संभव आहे.

अशा प्रकारच्या सामान्य (generalised) द्विपद प्रमेयाची सिद्धता या पुस्तकाच्या क्षेत्राबाहेरची आहे. परंतु सामान्य द्विपद प्रमेयाची प्रतिष्ठा (enunciation) आणि तें सत्य असण्याकरिता इष्ट प्रतिबंध पुढे दिल्याप्रमाणे आहेत.

(१) x घनपूर्णांक असल्यास y च्या सर्व अर्हाकरितां आणि (२) $-1 < y < 1$ असल्यास x च्या सर्व अर्हाकरितां

$$(1+y)^x = 1 + xy + \frac{x(x-1)}{2} y^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} y^3 + \dots$$

१२.४१ कांही सोडविलेली उदाहरणे—

उदाहरण १— $(1-y)^{\frac{1}{2}}$ चा चार पदापर्यंत विस्तार करा.

$$(1-y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} (-y) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} (-y)^2$$

$$+ \frac{\frac{8}{3}(\frac{8}{3}-1)(\frac{8}{3}-2)}{12}(-y)^2 + \dots$$

$$= 1 - \frac{8}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{8}{81}y^3 + \dots$$

उदाहरण २—

$(3+4y)^{-4}$ चा ४ पदापर्यंत विस्तार करा.

$$(3+4y)^{-4} = \frac{1}{3^4} \left[1 + \frac{4}{3}y \right]^{-4}$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[1 + (-4)\left(\frac{4y}{3}\right) + \frac{-4(-4-1)(\frac{4y}{3})^2}{12} \right. \\ \left. + \frac{-4(-4-1)(-4-2)(\frac{4y}{3})^3}{12} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[1 - \frac{20}{3}y + \frac{60}{3}y^2 - \frac{2240}{27}y^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{27} - \frac{20}{627}y + \frac{60}{627}y^2 - \frac{2240}{6461}y^3 + \dots$$

१२.५ $(1+y)^s$ च्या विस्तारांतील सामान्य पद.

$$\text{आता } (1+y)^s = 1 + sy + \frac{s(s-1)}{12}y^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots}{2} + \dots\dots$$

एतत्, ते सामान्यपदाचे अभिधान केल्यास
सामान्य पद $= (n+1)$ वे पद $= ए_{n+1}$

$$= \frac{s(s-1)(s-2)\dots\dots(s-n+1)y^n}{1 \times 2 \times 3 \dots\dots n}$$

सामान्यपदाच्या गुणकाच्या अंशांतील एखादा अवयव शून्य असल्याशिवाय तो गुणक कदापि शून्य होत नाही. आता न हा सदैव धनपूर्णांक असल्यामुळे, स धनपूर्णांक असल्या-
शिवाय अंशांतील एखादी अवयव शून्य होणार नाही.

म्हणून स धनपूर्णांक नसल्यास $(1+y)^s$ च्या विस्तारांत पदांची संख्या अंनंत असते.

१२.५१ कांही सोडवलेली उदाहरणे.

$(1-y)^{-\frac{1}{2}}$ च्या विस्तारांतील सामान्य पद काढा.
($n+1$) वे पद

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots\dots n} (-y)^n$$

$$= \frac{-1(-3)(-5)\dots\dots(-2n+1)}{2^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots n} (-y)^n$$

अंशांत न अवयव आहेत, आणि त्यांपैकी प्रत्येक घट्टण आहे. म्हणून
(न+१) वे पद

$$= (-)^{न} \frac{१ \cdot ३ \cdot ५ \dots (२न-१)}{२^n \underline{n}} y^n$$

$$= \frac{१ \times ३ \times ५ \dots (२न-१)}{२^n \underline{n}} y^n$$

उदाहरण २—

$(१-y)^{-१}$ च्या विस्तारांतील सामान्यपद.

(न+१) वे पद

$$= \frac{(-२)(-३) \dots (-२-न+१)}{१ \cdot २ \cdot ३ \dots न} (-y)^न$$

$$= \frac{२ \cdot ३ \cdot ४ \dots न (न+१)}{१ \cdot २ \cdot ३ \dots न} y$$

अंश आणि छेद यांतील साधारण अवयवांचा लोप करून

$$(न+१) वे पद = (न+१) y^n$$

१२.५२ $(१-y)^{-१}$ च्या विस्तारांतील सामान्य पदाचे अति सरळ रूप.

$$(न+१) वे पद = प_{न+१}$$

$$= \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)\dots(-s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} (-y)^n$$

$$= (-1)^n \frac{(s)(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} (-y)^n$$

$$= (-1)^n \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n} y^n$$

$$= \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n} y^n$$

या सामान्य पदावरून असे दिसून येते की $(1-y)^{-s}$ च्या विस्तारांत प्रत्येक पद धन आहे.

स ला १, २, ३.....या अर्ही दिल्यास

$$(1-y)^{-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^n + \dots$$

$$(1-y)^{-2} = 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots + (n+1)y^n + \dots$$

$$(1-y)^{-3} = 1 + 3y + 6y^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \times 2} y^n + \dots$$

उदाहरण १— $\frac{1}{1-y}$ च्या विस्तारांतील सामान्य-पद काढा.

$$\text{आता } \frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}}$$

(n+1)वें पद

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\dots\dots(\frac{1}{2}+n-1)}{1 \times 2 \times 3 \dots\dots n} (y)^n \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \dots\dots \times (n-1) \cdot \frac{1}{2} \times y^n}{n!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \dots\dots (n-1)}{n!} y^n \end{aligned}$$

१२.६ $(1+y)^n$ च्या विस्तारांतील पदांचीं चिह्ने—

$$\begin{aligned} \text{आता } (1+y)^n &= 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} y^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} y^3 + \dots\dots \\ p_{n+1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots\dots n} y^n \\ p_n &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \dots\dots \times (n-1)} y^{n-1} \end{aligned}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{s-n+1}{n} y$$

यावरून p_n ला $\frac{s-n+1}{n} \times y$ ने गुणिल्यास p_{n+1} हे पद मिळते.

$$\text{आता, } \frac{s-n+1}{n} y = \left\{ \frac{s+1}{n} - 1 \right\} y$$

आता,

- (१) $(s+1)$ क्रम असल्यास, त्याचप्रमाणे
- (२) $(s+1)$ ची अर्धा कांहीहि असून $n > s+1$

असल्यास, $\left\{ \frac{s+1}{n} - 1 \right\}$ क्रमच राहते.

म्हणून y धन आणि $n > s+1$ असल्यास $(n+1)$ वे पद आणि n वे पद यांची निष्पत्ति सदैव क्रम राहते. म्हणून, जेव्हा n हा $(s+1)$ पेक्षा अधिक असा पहिला धनपूर्णांक असतो तेव्हा $(1+y)^s$ च्या विस्तारांत n व्या पदानंतरचीं पदे एकांतराने (alternately) धन आणि क्रम असतात.

y क्रम असल्यास आणि $n > s+1$ असल्यास $(n+1)$ वे पद आणि n वे पद यांची निष्पत्ति सदैव धनच राहते. म्हणून n व्या पदाच्या त्रिधाप्रमाणेच त्याच्या पुढील पदांचीं चिह्ने राहतात. याचा एक विशिष्ट प्रकार म्हणजे s क्रम असल्यास $(1-y)^s$ च्या विस्तारांतील प्रत्येक पद धन असतं हा होय.

१२.७ स परिमेय (rational) असल्यास $(१+y)^n$ च्या विस्तारांतील, संख्येने महत्तम पद काढणे.

संख्येने महत्तम पद काढावयाचें आहे म्हणून य ला सर्वत्र घन मानलें आहे. स घन पूर्णांक असल्यास महत्तम पद कोणतें असतें तें आपण ११.६ व्या अनुच्छेदांत ठरविलें आहे.

आता, स ची अर्धा क्रण, किंवा भिन्न असल्यास $-१ < y < १$ या अर्धाकरिता द्विपद विस्तार सत्य आहे हें आपण पाहिलेंच आहे. $-१ < y < १$ असतांना $(१+y)^n$ च्या विस्तारांतील महत्तम पद कोणतें तें आपण ठरवूं प्रकार १ ला. समजा स हा एक घन भिन्न आहे.

$$\begin{aligned} \text{आता : } p_{n+1} &= \frac{s-n+1}{n} y \times p_n \\ &= \left(\frac{s+1}{n} - 1 \right) y \times p_n \end{aligned}$$

$\left(\frac{s+1}{n} - 1 \right) y$ हा अवयव $n < s+१$ असेपर्यंत घनच राहतो. आणि नंतर तो क्रण होतो. परंतु संख्येने १ पेक्षा लहानच असतो.

$$\text{आता } \left(\frac{s+1}{n} - 1 \right) y \geq १ \text{ तदनुसार } p_{n+1} \geq p_n$$

$$\text{अर्थात् } n \leq \frac{s+1}{1+y} \text{ य तदनुसार } p_{n+1} \geq p_n$$

(१) $\left(\frac{स+१}{१+य}\right)$ य हा पूर्णांक असून त समान आहे,

असे समजा. ।

(अ) आता $(त-१)$ पर्यंत न च्या सर्व अर्ही $\frac{स+१}{१+य}$ य पेक्षा

लहान आहेत.

म्हणून न च्या या सर्व अर्हांकरिता प्रत्येक पद पूर्वगामी पदापेक्षा अधिक आहे.

अर्थात् $प_t > प_{त-१} > प_{त-२} \dots \dots > प_१ > प_०$

ह्या सर्व पदांत $प_t$ हेच महत्तम पद आहे.

(आ) न = त असल्यास $प_t = प_{त+१}$

(इ) न ला, $त+१$, $त+२$, $त+३$, या अर्ही

दिल्यास न $> \frac{स+१}{१+य}$ य आणि म्हणून

$प_{त+१} > प_{त+२} > प_{त+३} \dots \dots \dots$

या सर्व पदांमध्ये $प_{त+१}$ हे महत्तम पद आहे.

यावरून $\frac{स+१}{१+य}$ य हा पूर्णांक असून त समान अस-

ल्यास $प_t$ आणि $प_{त+१}$ हीं दोन महत्तम पदे येतात आणि तीं परस्परांसमान असतात.

(२) समजा $\frac{s+1}{1+y}$ य हा मिश्र असून त्याचा पूर्णांक

भाग थ आहे.

(अ) आता न ज्या थ पर्यंत सर्व अर्हाकरिता

$$n < \frac{s+1}{1+y} \times y$$

म्हणून $p_{y+1} > p_y > p_{y-2} > \dots > p_1 > p_0$

म्हणजेच p_{y+1} हे महत्तम पद आहे.

(आ) आता, न ज्या थ + १, थ + २, थ + ३ या अर्हाकरिता

$$n > \frac{s+1}{1+y} y$$

म्हणून $p_{y+1} > p_{y+2} > p_{y+3} > \dots > \dots$

म्हणजेच p_{y+1} हे महत्तम पद आहे

यावरून $\frac{s+1}{1+y}$ य हा मिश्र असल्यास p_{y+1} हे महत्तम

पद आहे.

प्रकार २ रा. समजा स क्रण आहे.

आता म ही घन राशि अशी द्या की $s = -m$

$s = \frac{-n+1}{n}$ य या अवयवाची चिह्ननिरपेक्ष

अर्थात् $\frac{m+n-1}{n}$ य किंवा $\left(\frac{m-1}{n} + 1\right)$ य आहे.

मात्रा $\left(\frac{m-1}{n} + 1\right)$ य ≥ 1 असल्यास

किंवा $n \leq \frac{m-1}{1-y}$ य असल्यास $p_{n+1} \geq p_n$

(१) जर $\left(\frac{m-1}{1-y}\right)$ य धन पूर्णांक असून ते समान असेल तर पहिल्या प्रकारप्रमाणेच p_{n+1} आणि p_n हीं दोन पदे समान असून महत्तम असतात.

जर $\left[\frac{m-1}{1-y}\right]$ य धन भिन्न असून या हा'त्याचा पूर्णांक भाग असेल तर p_{n+1} हे महत्तम पद आहे.

(२). जर $\frac{m-1}{1-y}$ य ऋण असेल तर $m-1$ पेक्षा लहान होतो आणि $\frac{s-n+1}{n}$ य हा अवयवसुद्धा १ पेक्षा लहान होतो. म्हणून प्रत्येक पद पूर्वगामी पदोपेक्षा लहान होते. अर्थात् पहिले पदच महत्तम पद होते..

१२७१ उदाहरण— $y = \frac{1}{2}$, आणि $s = १५$ या अर्दां.

कृतिता $(1+y)^{-n}$ ज्या विम्वारांतील महत्तम पद काढा.

$$\text{भाता } p_{n+1} = \frac{18+n-1}{n} p_n \quad (\text{सर्वथे})$$

$$= \frac{17+n-1}{n} \times \frac{1}{3} p_n$$

$$= \frac{16+n}{3n} p_n$$

$$\text{किंवा } 16+n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 3n$$

$$\text{द्विधा } n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 16 \text{ असल्यास } p_{n+1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} p_n$$

$n < 16$ असल्यास म्हणजेच $n=1, 2, 3, \dots, 15$

असल्यास

$$p_0 > p_1 > p_2 > \dots > p_{15} > p_{16}$$

$$\text{भाता } n=16 \text{ चेतल्यास } p_{16} = p_{17}$$

आणि $n > 16$ असल्यास म्हणजेच

$$n=17, 18, 19, \dots \text{ असल्यास}$$

$$p_{16} > p_{17} > p_{18} > \dots$$

यावरून p_{16} आणि p_{17} हीं पदे महत्तम असून समान

आहेत.

१२.८ कांही सोडविलेली उदाहरणे

उदाहरण १— य च्या लघुतम अर्हाकरिता य चा द्विघात आणि उच्चतम घात उपेक्ष्य समजल्यास

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{3}{9}y} + (1 - \frac{3}{9}y)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}y} + \sqrt{1 - \frac{9}{3}y}} \quad \text{ची अर्हा काढा.}$$

य चा द्विघात आणि उच्चतम घात उपेक्ष्य असल्यामुळे प्रत्येक विस्तार फेवल य च्या एकघाती पदापर्यंतच करावा. दिलेली राशि

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 - \frac{3}{9}y\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{3}{9}y\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{2}y\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{9}{3}y\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{3}{9}y + \dots\right) \left[1 + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{9}y) + \dots\right]}{\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y + \dots\right) + \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{3}y + \dots\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{6}y + 1 + 3y \\
&= \frac{1 + \frac{1}{6}y + 1 - \frac{1}{2}y}{2 + \frac{20}{6}y} \\
&= \frac{2 - \frac{1}{2}y}{2 + \frac{10}{3}y} \\
&= \frac{1 + \frac{10}{6}y}{1 - \frac{5}{12}y} \\
&= \left(1 + \frac{10}{6}y\right) \left(1 - \frac{5}{12}y\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{10}{6}y\right) \left(1 + \frac{5}{12}y\right) \\
&= 1 + \frac{10}{6}y + \frac{5}{12}y + \dots
\end{aligned}$$

द्विघात उपेक्ष्य समजून दिलेली राशि

$$= 1 + \frac{415}{336}y$$

उदाहरण २— $\frac{1}{\sqrt{99}}$ ची धदा $<$ दशांशस्थानापर्यंत

अपूक काढा.

$$\frac{1}{\sqrt{99}} = (99)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (10^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{10} \left[1 - \frac{1}{10^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{10} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{10^2} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right)}{1 \times 2} \left(-\frac{1}{10^2} \right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} - 2 \right)}{1 \times 2 \times 3} \left(-\frac{1}{10^2} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{10} \left[1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^2} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 10^4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 10^6} \times \frac{1}{10^2} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \times 10^3} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 10^5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 10^7} + \dots$$

आता प्रत्येक पदास दशांशाचें रूप द्या.

$$\text{पहिलें पद} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\text{दुसरें पद} = \frac{1}{2 \times 10^2} = 0.005$$

$$\text{तिसरें पद} = \frac{1 \times 3}{2^3 \times 10^4} = 0.00000375$$

$$\text{चवथें पद} = \frac{1 \times 6}{2^4 \times 10^6} = 0.0000003125$$

चवथ्या पदांत ८ दशांश स्थानापर्यंत शून्येच आहेत.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{29}} = 0.1 + 0.005 + 0.00000375$$

$$+ 0.000000312$$

$$= 0.10500375$$

$$= 0.10500376$$

उदाहरण ३— $(1+y+y^2)^{-1}$ च्या विस्तारांतील y^3

चा गुणक काढा.

[नागपूर १९३१]

$$(1+y+y^2)^{-1} = \frac{1}{1+y+y^2}$$

$$= \frac{1-y}{(1-y)(1+y+y^2)}$$

$$= \frac{1-y}{1-y^3}$$

$$= (1-y)(1-y^3)^{-1}$$

$$= (1-y)(1+y^3+y^6+y^9+y^{12}+\dots\infty)$$

यांत y^3 चा गुणक -1 आहे हे सहज समजून येते.

उदाहरण ४— द्विपद प्रमेय द्वारा

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1 \times 3}{8 \times 4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{8 \times 4 \times 12} + \dots\infty = \sqrt{2}$$

हे सिद्ध करा.

दिलेली धेढी अन्यप्रकारे लिहतां येते ती अशी

$$1 + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{1 \times 2} \times \frac{1}{2^2} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2}}{1 \times 2 \times 3 \times 2^3} + \dots\infty$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1 \times 2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1 \times 2 \times 3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\infty$$

पण हा $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ चा विस्तार आहे.

$$\therefore \text{दिलेली धेढी} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

प्रश्नसंग्रह १८

(१) खालील विस्तारांतील $(n+1)$ वे पद काढा—

(१) $(1+y)^{-\frac{3}{2}}$ (२) $(1-y)^{-\frac{1}{2}}$

(३) $(1+2y)^{\frac{3}{2}}$ (४) $(1+y^2)^{-1}$

(५) $(3-y)^{-2}$ (६) $x \frac{1}{\sqrt{k-y}}$

(७) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2y)^2}}$ (८) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3y)}}$

(२) (१) $(1-4y)^{-\frac{3}{2}}$; $(k^2+3xy^2)^{-1}$ आणि

(३) $\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{2}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1/2}$ यांच्या विस्तारात

क्रमशः y^0 , y^1 आणि y^2 यांचे गुणक काढा.

(३) $(1-4y)^{\frac{3}{2}}$ चा विस्तार ४ पदापर्यंत लिहा.

[कलकत्ता १९२३]

- (४) $(क^२ - २कय)^{\frac{१}{२}}$ चा विस्तार $य^५$ पर्यंत $य$ च्या आरोही घातांत करा आणि त्यांतील सामान्यपद लिहा.
- (५) $(क^२ + य)^{\frac{१}{२}}$ चा ५ पदापर्यंत विस्तार करा.
- (६) $(१ - ३य)^{\frac{३}{२}}$ च्या विस्तारांतील $य^n$ चा गुणक काढा.
- (७) $\frac{(१ + य)^२}{(१ - य)^३}$ च्या विस्तारांतील $य^४$ चा गुणक काढा.
- (८) खालील विस्तारांतील $य$ च्या दिलेल्या अर्देंकरिता महत्तम पद काढा.

(१) $(१ + य)^{\frac{१}{२}}$, $य = \frac{१}{३}$

(२) $(१ + य)^{-१}$, $य = \frac{४}{९}$

(३) $(१ - य)^{-\frac{३}{२}}$, $य = \frac{१३}{१५}$

- (९) खालील राशींच्या निर्दिष्ट दशांश स्थानापर्यंत अर्दा काढा.

(१) $(४.०८)^{\frac{१}{२}}$ ६ दशांश स्थानापर्यंत

(२) $(१.०४)^{\frac{१}{१०}}$ ४ ,, ,,

(३) $(१.००२)^५$ ६ ,, ,,

(४) $(८.१६)^{-\frac{१}{३}}$... ४ ,, ,,

(१०) खालील विस्तारांत y च्या, यथानिर्दिष्ट घातांचे गुणक काढा.

(१) $\frac{1+y}{(1-y)^3}$ च्या विस्तारांत, y^2 चा. [फलकत्ता १९३७]

(२) $\frac{1-2y}{(3+2y-y^2)}$ च्या विस्तारांत, y^2 चा. [फलकत्ता १९०९]

(३) $\frac{1+y}{1-y}$ च्या विस्तारांत, y^4 चा. [फलकत्ता १९१९]

(४) $(1-2y+20y^2)^{-1}$ च्या विस्तारांत, y^5 चा. [मुंबई १८९३]

(५) $\frac{(1+3y)^2}{(1+2y)^2}$ च्या विस्तारांत, y^5 चा [मुंबई १८९१]

(११) $-1 < y < 1$ असल्यास

$$(1+y+y^2+y^3+\dots)^2 = 1+2y+3y^2+4y^3+\dots+sy^{s-1}+\dots$$

हें सिद्ध करा.

(१२) $-1 < y < 1$ असल्यास

$(1+2y+3y^2+4y^3+\dots)^2$ च्या विस्तारांत y^s चा गुणक काढा.

पुढील १३ ते १६ या उदाहरणांत य इतका लघुतम आहे की य चा द्विघात आणि उच्चतर घात उपेक्ष्य समजले तर सिद्ध करा—

$$(१३) \quad \frac{(८ + ३य)^{\frac{३}{२}}}{(२ + ३य)\sqrt{४ - ५य}} = १ - \frac{५य}{८} \quad (\text{टोकळमानाने})$$

[नागपूर १९३३]

$$(१४) \quad \frac{\left(१ + \frac{३}{२}य\right)^{-१} + (१ - २य)^{-१}}{\left(१ + \frac{७}{२}य\right)^{-३} + (१ + य)^{-२}} = १ + २य$$

(टोकळमानाने)

$$(१५) \quad \frac{(१ - ३य)^{\frac{३}{२}} + (१ - य)^{\frac{३}{२}}}{(४ + य)^{\frac{३}{२}}} = १ - \frac{४१य}{२४} \quad (\text{टोकळमानाने})$$

[नागपूर १९४६]

$$(१६) \quad \frac{(९ + २य)^{\frac{३}{२}}(३ + ४य)}{(१ - य)^{\frac{३}{२}}} = ९ + \frac{७४}{५} य \quad (\text{टोकळमानाने})$$

द्विपद प्रमेयद्वारा खालील अनंत श्रेढ्यांचे योग काढा.

$$(१७) \quad १ + \frac{२}{१} \times \frac{१}{३^२} + \frac{२ \times ५}{१ \times २} \times \frac{१}{३^२}$$

$$+ \frac{2 \times 4 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{3^1} + \dots\dots\dots$$

(१८) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{9} + \dots$
[बलाहावाद १९२९]

(१९) $1 + \frac{3}{4} + \frac{3 \times 4}{4 \times 6} + \frac{3 \times 4 \times 7}{4 \times 6 \times 12} + \dots\dots$

(२०) $\frac{3}{1} + \frac{3 \times 4}{1 \times 2} \times \frac{1}{3} + \frac{3 \times 4 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{3^1} + \dots\dots$

[मद्रास १९४०]

(२१) $\frac{x}{y}$ इतका लघुतम आहे की त्याचे द्विघात घन आणि उच्चतर घात उपेक्ष्य आहेत.

तर $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}}$ ची अर्ही जवळ जवळ

$2 + \frac{3x^2}{8y^2}$ च्या समान आहे हे सिद्ध करा.

[नागपूर १९२७]

(२२) $\frac{7}{6} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1 \times 3}{1 \times 2} \times \frac{1}{10^4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{10^6} \right. \\ \left. + \dots\dots\infty \right) = \sqrt{2}$

आहे हे दाखवा.

प्रतिच्छेदा (antilogarithms)— जर य ही र ची क -आधारी छेदा असेल तर र ला य ची क -आधारी प्रति-च्छेदा म्हणतात.

१३.११ उदाहरण १—

$$2^1 = 2 \text{ म्हणून छे, } 2^0 = 1$$

$$\text{उदाहरण २— } 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ म्हणून छे, } \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\text{उदाहरण ३— } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{म्हणून छे, } \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण ४— क ही कोणतीहि राशि असली तरी

$$k^0 = 1 \text{ म्हणून छे, } 1 = 0$$

उदाहरण ५— क^० = १ म्हणून छे, १ = ०

वरील उदाहरणांवरून खालील विधाने निष्पन्न होतात.

(१) छेदा घन किंवा ऋण; पूर्णांक, अथवा भिन्न असू शकते.

(२) एखाद्या राशीच्या छेदेचा आधार जर तीच राशि असेल तर छेदेची अर्हा एक असते.

(३) एकची छेदा —कोणताहि आधार असला तरी— शून्यच असते.

१३.२ या अनुच्छेदांत छेदांविषयी कांही प्रमेये सिद्ध केली आहेत.

(१) दोन राशींच्या गुणाकाराची, दत्ताधार छेदा त्या दोन राशींच्या त्याच आधारी छेदांच्या योगासमान असते.

$$\text{अर्थात् } छेक(म \times न) = छेकम + छेकन$$

$$\text{समजा } य = छेकम \text{ म्हणून } क^य = म$$

$$\text{आणि } र = छेकन \text{ म्हणून } क^र = न$$

$$\begin{aligned} \text{आता } म \times न &= क^य क^र \\ &= क^{य+र} \end{aligned}$$

म्हणून परिभाषेनुसार $य + र = छेक(म \times न)$. य आणि र कया अर्हांचा आदेश करून $छेक(म \times न) = छेकम + छेकन$

(२) पक्षाचा लब्धीची दत्ताधार छेदा ही, भाज्याच्या त्याच आधारी छेदेतून भाजकाची त्याच आधारी छेदा उणें करून येणाऱ्या राशीसमान असते.

$$\text{अर्थात् } छेक\left(\frac{म}{न}\right) = छेकम - छेकन$$

$$\text{समजा } य = छेकम \text{ म्हणून } क^य = म$$

$$\text{आणि } र = छेकन \text{ म्हणून } क^र = न$$

$$\begin{aligned} \text{आता } \frac{म}{न} &= \frac{क^य}{क^र} \\ &= क^{य-र} \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून परिभाषेनुसार } (य - र) = छेक\left(\frac{म}{न}\right)$$

य आणि र च्या अर्हाचा आदेश करून

$$\text{छेक}\left(\frac{m}{n}\right) = \text{छेक}m - \text{छेक}n$$

उदाहरण १—

$$\begin{aligned}\text{छेक}(33 \times 64) &= \text{छेक}33 + \text{छेक}64 \\ &= \text{छेक}(11 \times 3) + \text{छेक}(13 \times 4) \\ &= \text{छेक}11 + \text{छेक}3 + \text{छेक}4 + \text{छेक}13\end{aligned}$$

उदाहरण २—

$$\begin{aligned}\text{छेक}\frac{(17 \times 237 \times 87)}{(23 \times 47)} \\ &= \text{छेक}(17 \times 237 \times 87) - \text{छेक}(23 \times 47) \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}237 + \text{छेक}87 - \text{छेक}23 - \text{छेक}47 \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}(3 \times 79) + \text{छेक}87 \\ &\quad - \text{छेक}23 - \text{छेक}(19 \times 3) \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}3 + \text{छेक}79 + \text{छेक}87 - \text{छेक}23 \\ &\quad - \text{छेक}19 - \text{छेक}3 \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}79 + \text{छेक}87 - \text{छेक}23 - \text{छेक}19\end{aligned}$$

(३) पन्नाचा घातास उन्नयन केलेल्या राशीची दत्ताधार छेदा ही तो घात आणि त्याच राशीची त्याच आधारी छेदा यांच्या गुणाकारासमान असते.

अर्थात् $\text{छेक}(m^n) = n \text{ छेक}m$. हे प्रमेय न च्या सर्व अर्हा-करिता सत्य आहे.

समजा $y = \text{छेक}m$ म्हणून $k^y = m$

आता 'मन' = (कय)न = कयन

म्हणून परिभाषेनुसार छेकमन = नय

य च्या अर्हेचा आदेश करून

$$\text{छेकमन} = \text{न} \times \text{छेकम}$$

१० ✓९९९ ची अर्हा प्रत्यक्ष रीतीने काढणें फार कठीण आहे. पण छेदेच्या मदतीने ९९९चें १७ वें मूळ काढण्याचें काम फारच सोपें होतें.

१० ✓९९९ ची छेदा घेतल्यास

$$\text{छे.} \quad १० \sqrt{९९९} = \frac{१}{१७} \text{ छे.} (९९९)$$

$\frac{१}{१७}$ छे. (९९९) ची अर्हा कशी निश्चित करतात हें पुढे

सांगितलेंच आहे. दक्षिण पक्षाची अर्हा निश्चित केल्यानंतर प्रतिच्छेदेच्या सारणीवरून इष्ट मूळ काढतां येते.

१३.२१ वरील प्रमेयांत गुणाकार आणि भागाकार यांच्या क्रियांपेवजी योग आणि वियोग या क्रिया आणि घातास उन्नयन केलेल्या राशीची अर्हा काढण्याच्या रीतीपेवजी गुणाकार ही क्रिया उपयोगांत आणावी लागते.

गुणाकार, भागाकार, वर्गमूळ...आदि गुंतागुंतीच्या विधि सुकर करण्याकरिता छेदाच्या प्रमेयांचा उपयोग करतात. ह्याच उद्देशाने सर्व संख्यांच्या छेदांचें, प्रमाण (standard) आधारी, कांही दशांश स्थानापर्यंत, परिगणन करून ठेवलेलें आहे. तात्त्विक विवेचनांत (in theory) 'घा' (हिचा अर्थ

पुढील प्रकरणांत स्पष्ट केला जाईल) ही राशि छेदेचा आधार घेतली असून व्यवहारांत (in practice) 10 हा अंक आधार घेऊन छेदांचें परिगणन केलेलें आहे.

दहा-आधारी छेदेस साधारण छेदा (common logarithm) म्हणतात.

कोणत्याहि आधारी —समजा स आधारी— छेदा काढावयाची असल्यास या आधार घेऊन छेदेचें परिगणन करून नंतर या चें स मध्ये परिवर्तन करतात.

धीजीय अनुसंधान करतांना प्रथम या आधारीच छेदा विचारांत घेतल्या गेल्या म्हणून या —आधारी छेदेस प्राकृतिक छेदा (natural logarithm) म्हणतात.

12.2 प्रत्येक छेदा नेहमी घन आणि पूर्णांक असतेच असं नाही, हें खालील उदाहरणांचरून स्पष्ट होईल.

समजा न हा कोणतीहि राशि असून $10^y = n$, म्हणून छे. $n = y$

आता $n = 412$ घेतल्यास

$$412 < 10^3 \text{ पण } > 10^2$$

$$\text{अथवा } 10^2 < 412 < 10^3$$

$$\text{म्हणून } 412 = 10^{2+\text{लघ्वंश भिन्न}}$$

$$\text{म्हणून छे. } 412 = 2 + \text{एखादा लघ्वंश भिन्न}$$

किंवा 412 ची छेदा 2 आणि 2 च्या मधोल भिन्न आहे.

$$\text{आता } n = .08 \text{ घ्या.}$$

$$.08 > 10^{-1} \text{ आणि } < 10^{-2}$$

$$\text{किंवा } 10^{-2} < .08 < 10^{-1}$$

$$\text{किंवा } 10^{-2+\text{लघ्वंश भिन्न}} = .08$$

$$\text{म्हणून छे, } (.08) = -2 + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

किंवा .08 ची छेदा ऋण भिन्न आहे.

१३.३१ लक्षण आणि दशमिकांश [characteristic and mantissa]

परिभाषा— एखाद्या राशीची छेदा अंशतः पूर्णांक आणि अंशतः अपूर्णांक असेल तर तिच्या पूर्णांक भागाला छेदेचें लक्षण आणि अपूर्णांक भागाला छेदेचा दशमिकांश म्हणतात.

१३.४ कोणत्याहि राशीच्या दहा-वाचारी छेदेचें लक्षण केवळ निरीक्षणानेच निश्चित करतां येतें.

(१) एक पेक्षा अधिक असलेल्या संख्येच्या छेदेचें लक्षण निश्चित करणें.

$$\text{आता } 10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

.....

.....

यावरून असें दिसून येतें की जिच्यांतील पूर्णांक अंगांत दोन अंक आहेत अशी संख्या 10^1 आणि 10^2 यांमध्ये असते. पुन्हा, जिच्यांतील पूर्णांक अंगांत तीन अंक आहेत अशी संख्या 10^2 आणि 10^3 यांमध्ये असते. सामान्यतः

ज्या संख्येतील पूर्णांक अंगांत स अंक आहेत अशी संख्या 10^{s-1} आणि 10^s यामध्ये असते.

समजा, न या राशीचे पूर्णांक अंग स अंकी आहे.

$$\text{तेव्हा } n = 10^{(s-1) \times \text{लघ्वंश भिन्न}}$$

$$\therefore \text{छे. } n = s - 1 + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

यावरून छे. n चे लक्षण $(s - 1)$ आहे. अर्थात् १ पेक्षा अधिक असलेल्या कोणत्याही राशीच्या छेदेचे लक्षण सदैव धन असून, ते त्या राशीच्या पूर्णांक अंगांतील अंकांपेक्षा १ ने कमी असते.

(२) १ पेक्षा लहान असलेल्या दशमिक भिन्नाच्या छेदेचे लक्षण ऋण असून ते त्यांत दशमिक चिह्नानंतर लगेच असणाऱ्या शून्याच्या अंकांपेक्षा १ ने अधिक असते.

$$\text{आता } 10^{-1} = ?$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = .01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = .001$$

.....
.....

यावरून असे दिसून येते की, दशमिक चिह्नानंतर लगेच एकाही शून्य नसलेला कोणताही दशांश भिन्न 10^{-1}

आणि 10^0 यांच्यामध्ये असतो. दशमिक चिह्नानंतर लगेच १ शून्य असलेला कोणताही दशमिक भिन्न 10^{-2} आणि 10^{-1} यांमध्ये असतो. दशमिक चिह्नानंतर लगेच २ शून्य असलेला कोणताही दशांश भिन्न 10^{-3} आणि 10^{-2} यांच्यामध्ये असतो.

सामान्यतः, दशमिक चिह्नानंतर लगेच d शून्य असलेला दशमिक भिन्न $10^{-(d+1)}$ आणि 10^{-d} यांच्यामध्ये असतो. या दशमिक भिन्नाचे 'दा' ने प्रतिनिधान केल्यास

$$10^{-d} > दा > 10^{-(d+1)}$$

$$\text{म्हणून } दा = 10^{-(d+1)} + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

$$\therefore, \text{छे. दा} = -(d+1) + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

याप्रमाणे दशमिक चिह्नानंतर लगेच d शून्य असलेल्या दा या दशमिक अपूर्णाकांच्या छेदेचे लक्षण $-(d+1)$ आहे.

१३.५ निरनिराळ्या राशींतील सार्थक (significant) अंकांचा क्रम तोच असल्यास त्या राशींच्या छेदांतील दशमिकांश समान असतात.

समजा, m आणि n या दोन राशींतील सार्थक अंकांचा क्रम एकच असून केवळ दशमिक चिह्नांचीच स्थाने निरनिराळी आहेत.

आता कोणत्याही राशीला 10 च्या कोणत्याही पूर्णांक घाताने गुणल्यास त्यांतील दशमिक चिह्नाच्या स्थानाचे विचलन होतं. यावरून न ला 10 च्या विवक्षित पूर्णांक

घाताने गुणिल्यास गुणाकार म समान होईल. समजा त हा धन किंवा ऋण पूर्णांक असा आहे की

$$म = न \times १०^०$$

$$\therefore छे, .म = छे, .(न \times १०^०)$$

$$= छे, .न + छ, .१०^०$$

$$= छे, .न + त छे, .१०$$

$$= छे, .न + त$$

यावरून म आणि न यांच्या छेदातील फरक केवळ, त हा एक पूर्णांकच आहे.

म्हणून त्या दोन छेदांचे दशमिकांश समान आहेत. यावरून ज्या राशीच्या सार्थक अंकांचा क्रम तोच असतो त्यांच्या छेदांचे दशमिकांश समान असतात.

१३.५१ पूर्व अनुच्छेदांत दशमिकांश धन समजले गेले आहेत. सामान्य पद्धतीत छेदेचा दशमिकांश सदैव धनच राहील अशा रीतीने छेदा लिहिली जाते.

उदाहरणार्थ— छे (००३) ची अर्दी काढल्यास तिचे लक्षण—३ आणि दशमिकांश ४७७१ ही येतात.

ह्यावरून ००३ ची छेदा (—३ + ४७७१) ही ऋण राशि येते. पण व्यवहारांत आपण दशमिकांश धन ठेवून केवळ लक्षणच ऋण ठेवतो लक्षणाचे ऋण चिह्न त्याच्या डोऱ्यावर लिहिण्याची पद्धत आहे.

छे (००३) = ३.४७७१ असं लिहितात.

यांत ४७७१ ही घन राशि असून ३ ने ३ चा बोध होतो.

३. ४७७१ आणि -३.४७७१ ह्या दोन निरनिराळ्या राशी आहेत हें नीट लक्षांत ठेवलें पाहिजे. पहिलीत पूर्णांकच केवळ ऋण असून दुसरी पूर्णतः ऋण आहे. जसे

$$३.४७७१ = -३ + ४७७१ \text{ आणि}$$

$$-३.४७७१ = -३ - ४७७१$$

छेदेचा उपयोग करून प्रदत्त सोडवितांना छेदेचें लक्षण, त्याचप्रमाणे दशमिकांश हीं दोन्ही ऋण घेण्याचा संभव आहे. परंतु दशमिकांश धन करून घेण्याची पद्धत आहे. ती खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण - छे $(\frac{१}{३})$ ची अर्हा काढा.

$$\text{छे } \frac{१}{३} = \text{छे } \frac{१०}{३०} = \text{छे } १० - \text{छे } ३०$$

$$= १ - (१.४७७१)$$

$$= -०.४७७१$$

परंतु दशमिकांश धन ठेवण्यासाठी -४७७१ ही राशि
-१ + (१ - ४७७१) अशी लिहितां येते.

$$\text{म्हणून छे } \frac{१}{३} = -१ + (१ - ४७७१)$$

$$= -१ + ०.५२२९$$

$$= १.५२२९$$

यांत दशमिकांश धन आहे.

१३.६ निरीक्षणाने, एखाद्या राशीच्या छेदेचें लक्षण निश्चित करता येतें हें आपण मागील अनुच्छेदांत पाहिलेंच आहे. सर्व संख्यांच्या छेदांच्या दशमिकांशाचें परिगणन ४ किंवा ७ दशांश स्थानापर्यंत अचूक करून तें गणिती सारणीच्या रूपांत दिलें गेलें आहे. एखाद्या राशीच्या छेदेचा दशमिकांश ह्या सारणींत फसा शोधायचा याची रीति खाली स्पष्ट केली आहे.

याकरिता आपण चार अंकी सारणीचाच उपयोग करूं. ह्या सारणीचा नमुना या प्रकरणाच्या शेवटीं दिला आहे.

उदाहरण १— छे ८८ ची अर्हा काढा.

छेदासारणीचें पहिले पृष्ठ उघडा.

अगदी डाव्या अंगास असलेल्या अंकस्तंभावर दृष्टी फेका. ८८ या संख्येशीं थांवा. ८८ च्या पंक्तीवरून तजर फिरवा. या पंक्तींत आणि शीर्षस्थानीं शून्य असणाऱ्या स्तंभांमध्ये असलेली ९४४५ ही संख्या छे ८८ चा दशमिकांश आहे. [सारणीत दशमिक चिह्न गाळलेलें असतें तें विद्यार्थ्यांनी प्रत्येक वेळीं घेतलें पाहिजे.] १० आणि १०^१ यामध्ये ८८ असल्यामुळे छेदेचें लक्षण १ आहे.

म्हणून छे ८८ = १.९४४५.

(२) छे ५ ची अर्हा काढा.

छे ५ चा दशमिकांश छे ५० च्या दशमिकांशासमानच असतो.

छे ५० चा दशमिकांश, मागील उदाहरणांत सांगितल्या-

प्रमाणेच सारणीत पाहिल्यास ६९९० येतो. छे ५ चें लक्षण शून्य असतें.

म्हणून छे $५ = ०.६९९०$

(३) छे ६३.८ ची अर्हा काढा.

छे ६३.८ आणि छे ६३८ यांचे दशमिकांश समान असतात.

परिशिष्टाच्या पहिल्या पृष्ठावर अंकस्तंभांत ६३ शोधा. ६३ च्या पंक्तीवरून नजर फिरवा. शीर्षस्थानी ८ असणाऱ्या स्तंभामध्ये असणारी ८०४८ ही संख्या छे ६३८ किंवा ६३.८ यांचा दशमिकांश आहे.

आता छे ६३.८ चें लक्षण १ आहे.

म्हणून छे $६३.८ = १.८०४८$

(४) छे ०.०८३४६ ची अर्हा काढा.

छे ०.०८३४६ किंवा छे ८३४६ यांचे दशमिकांश समान असतात.

म्हणून परिशिष्टाच्या पहिल्या पृष्ठावर अगदी डाव्या अंगास असलेल्या अंकाच्या स्तंभांत ८३ शोधून काढा. ८३ च्या पंक्तीवरून नजर फिरवा. या पंक्तीत आणि शीर्षस्थानी ४ असलेल्या स्तंभामध्ये असलेल्या ९२१२ या संख्येवर या. ९२१२ हा छे ८३४ चा दशमिकांश आहे. ८३ च्याच पंक्तीवरून पुढे जाऊन मध्यकांतरांच्या (mean difference) सारणीत शीर्षस्थानी ६ असलेल्या स्तंभामध्ये ३ हा अंक (वस्तुतः तो राशि ०.००३ आहे) मिळेल.

०००३ ही राशि ०२१२ मध्ये मिळवा. म्हणजे ०२१५ हा छे ००८३४६ चा दशमिकांश होतो. आता छे ००८३४६ चे लक्षण -२ आहे.

अर्थात् छे ००८३४६ = -२ + ०२१५

साधारणपणे, छे ००८३४६ ची अर्हा २.०२१५ अशी लिहिली जाते.

१३.७ जर छे न = य असेल तर न ला य ची प्रतिच्छेदा म्हणतात, ही परिभाषा पूर्वीच दिली आहे.

अर्थात् न = प्रतिच्छे. य

प्रतिच्छेदांची सारणी प्रकरणाच्या शेवटी दिली आहे. तिच्या साहाय्याने एखाद्या राशीची प्रतिच्छेदा निश्चित करण्याची रीति पुढे दिली आहे.

प्रतिच्छे (२.४७८९) ची अर्हा काढा.

प्रथमतः लक्षण विचारांत न घेतां केवळ दशमिकांशाचाच विचार करा. प्रतिच्छेदांच्या सारणीत अगदी डाव्या अंगास असलेल्या स्तंभांत ४७ शोधून काढा. ४७ च्या पंक्तीत पण शीर्षस्थानी ८ असलेल्या स्तंभामध्ये ३००६ हा संख्येशी थांबा. पुन्हा याच पंक्तीमध्ये पुढे जाऊन मध्यकांतरांच्या सारणीत शीर्षस्थानी ९ असलेल्या स्तंभांत असणारा ६ हा अंक (घस्तुतः ०००६) मिळेल. ही राशि ३००६ मध्ये मिळवा म्हणजे ३०१२ ही प्रतिच्छे (४७८९) ची दशमिक चिह्न निरपेक्ष अर्हा आहे. किंवा ३०१२ हे प्रतिच्छे ४७८९ च्या अर्हचे सार्यंक अंक आहेत. प्रतिच्छे २.४७८९

छेकस ही स्थिर राशि आहे हिची अर्हा सारणीवरून काढतां येते. हिला मापांक म्हणतात.

$$\text{छेसन} = \frac{\text{छेसन}}{\text{छेकस}}$$

या समीकारांत न ऐवजी क चा आदेश करून

$$\text{छेसक} = \frac{\text{छेकक}}{\text{छेदस}}$$

$$\text{अर्थात् छेसक} \times \text{छेकस} = १$$

१३.९ छेदांचा उपयोग अंकगणिती गणन सुलभतेने करण्याकडे करतां येतो हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण १— ३८७ चें घनमूळ काढा.

$$\text{समजा } y = \sqrt[3]{३८७}, \text{ अर्थात् } y^3 = ३८७$$

दोन्ही पक्षांतील राशींच्या छेदा घेऊन

$$\text{छे } y^3 = \text{छे } ३८७$$

$$\text{किंवा } ३ \text{ छे } y = \text{छे } ३८७$$

छेदा सारणीचा उपयोग करून

$$३ \text{ छे } y = २.५८७७$$

$$\text{छे } y = ०.८६२६$$

$$\therefore y = \text{प्रतिच्छे } ०.८६२६$$

प्रतिच्छेदासारणीचा उपयोग करून

$$\text{प्रतिच्छे } ०.८६२६ = ७.२८८$$

$$\therefore y = 7.266$$

$$\text{अर्थात् } \sqrt[3]{369} = 7.266$$

उदाहरण २—

$$\sqrt[4]{\left(\frac{667 \times 739}{2357 \times 117}\right)^4} \text{ याची अर्हा ३ दशमिक}$$

स्थानापर्यंत अचूक काढा.

$$\text{समजा } = \sqrt[4]{\left(\frac{667 \times 739}{2357 \times 117}\right)^4}$$

दोन्ही पक्षांच्या छेदांचे समीकरण मांडून

$$\text{छेय} = \text{छे} \left(\frac{667 \times 739}{2357 \times 117} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{छे} 667 + \text{छे} 739 - \text{छे} 2357 - \text{छे} 117)$$

सारणीचा उपयोग करून

$$= \frac{1}{4} [2.2479 + 2.6666 - 3.372$$

$$- 2.0682]$$

$$= \frac{1}{4} [0.3763]$$

$$= 0.2140$$

$$\therefore y = \text{प्रतिच्छे } 0.2140$$

म्हणून सारणीवरून

$$y = 1.681$$

उदाहरण ३— छे २ = ३०१० आणि छे ७ = ८४५१ दिले
असतांना छे ९८० ची अर्ही काढा.

$$\begin{aligned}\text{छे } ९८० &= \text{छे}[१० \times २ \times ७^२] \\ &= \text{छे } १० + \text{छे } २ + \text{छे } ७^२ \\ &= \text{छे } १० + \text{छे } २ + २\text{छे } ७ \\ &= १ + ३०१० + १.६९०२ \\ &= २.९९१२\end{aligned}$$

उदाहरण ४— छे २ = ३०१० आणि छे ३ = ४७७१ असल्यास
६५० मध्ये किती अंक आहेत ते काढा.

समजा ६५० ची छेदा य आहे

$$\text{म्हणून } y = \text{छे } ६५०$$

$$\begin{aligned}&= ५७ \text{ छे } २ \times ३ \\ &= ५७ [\text{छे } २ + \text{छे } ३] \\ &= ५७ [३०१० + ४७७१] \\ &= ५७ [७७८१] \\ &= ४४.३५१७\end{aligned}$$

म्हणून छे ६५० चें लक्षण ४४ आहे.

यावरून ६५० मध्ये ४५ अंक आहेत.

उदाहरण ५— सोडवा

$$६३ - ४५ \times ४५ + ५ = ८$$

[फलकत्ता १९३८]

दोन्ही पक्षांच्या छेदांचा समीकार मांडून

$$\text{छे } [६^{३-४५} \times ४^{५+५}] = \text{छे } ८$$

$$\text{किंवा } (३-४५) \text{ छे } ६ + (५+५) \text{ छे } ४ = \text{छे } ८$$

$$\text{म्हणून य } [\text{छे } ३ - ४ \text{ छे } ६] = \text{छे } ८ - ५ \text{ छे } ३ - ३ \text{ छे } ६$$

$$\therefore \text{ य } = \frac{\text{छे } ८ - ५ \text{ छे } ४ - ३ \text{ छे } ६}{\text{छे } ३ - ४ \text{ छे } ६}$$

$$= \frac{३ \text{ छे } २ - १० \text{ छे } २ - ३ \text{ छे } २ - ३ \text{ छे } ३}{२ \text{ छे } २ - ४ \text{ छे } २ - ४ \text{ छे } ३}$$

$$= \frac{१० \text{ छे } २ + ३ \text{ छे } ३}{२ \text{ छे } २ + ४ \text{ छे } ३}$$

$$= \frac{१० \text{ छे } २ + ३ \text{ छे } ३}{२ \text{ छे } २ + ४ \text{ छे } ३}$$

छे २ आणि छे ३ च्या अर्हा मांडून

$$\text{य } = \frac{१० \times ३०१० + ३ \times ४७७१}{२ \times ३०१० + ४ \times ४७७१}$$

$$= \frac{४४४१३}{२४१०४}$$

$$= १.७ \text{ (एक दशमिक स्थानापर्यंत अचूक)}$$

उदाहरण ६—

$$७ \text{ छे } \frac{१६}{१५} + ५ \text{ छे } \frac{२५}{२३} + ३ \text{ छे } \frac{८१}{८०} = \text{छे } २ \text{ हें दाखवा.}$$

[फलकत्ता १९३६]

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= ७छे१६ - ७छे१५ + ५छे२५ - ५छे२४ \\
&\quad + ३छे८१ - ३छे८० \\
&= ७छे२४ - ७छे३ - ७छे५ + ५छे५ - ५छे२३ \\
&\quad - ५छे३ + ३छे३ - ३छे२ - ३छे५ \\
&= २८छे२ - ७छे३ - ७छे५ + १०छे१ - १५छे२ \\
&\quad - ५छे३ + १२छे३ - १२छे२ - ३छे५ \\
&= छे२
\end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह १९

खालील राशींच्या छेदा काढा. (उदा. १ ते ४)

- (१) २ आधारी २५६, १२८, ५, १२५, ०.०६२५
- (२) ३ आधारी २१८७, २४३
- (३) ५ आधारी ६२५, ३१२५, ०.०१६
- (४) (क) $२\sqrt{३}$ आधारी, १४३ ची
- (ख) $\sqrt{७}$ आधारी, ३४३ ची
- (ग) $२\sqrt{२}$ आधारी, ५१२ ची
- (घ) $\sqrt{५}$ आधारी, $\sqrt{५}$ ची
- (५) खालील छेदा छे फ, छे ग यांच्या पदांमध्ये व्यक्त करा.

(क) (ख) (ग)

$$(भा) छे (क^३ ख^{-१} ग^१)^३$$

$$(इ) छे (५ \sqrt{क^{-५} ख^{१५} ग^{३०}})$$

$$(ई) छे \left[\frac{^{१३}\sqrt{क^{२६} ख^{१०} ग^{३९}}}{(क^३ ख^{-१} ग^५)^३} \right]$$

$$(६) छे \frac{१०}{९} - २ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २ हें दाखवा.$$

[कलकत्ता १९३७]

$$(७) छे वा १० = २३ छे वा \frac{१०}{९} - छे वा \frac{२५}{२४} + १० छे वा \frac{८१}{८०}$$

हें दाखवा.

(८) खालील राशींच्या छेदांचीं लक्षणें काढा.

(क) १९४७ (ग) ३५९८७९ (ग) ०२ (घ) ००२

(ङ) ०००००७

खालील समीकार सोडवा. (उदा. ९ ते १४)

$$(९) क^{३-य} ख^{५य} = क^{य+५} ख^{३य} \quad [कलकत्ता १९३७]$$

$$(१०) ३य = ५$$

$$(११) २य \times ३य = १०० \quad [कलकत्ता १९२५]$$

$$(१२) य^२ = २य आणि य = २२ \quad [कलकत्ता १९३५]$$

$$(१३) ३^{२य} \times ५^{३य-४} = ७^{य-९} \times ११^{३य} \quad [मद्रास १९२८]$$

$$(१४) छे (य^२ र^३) = क आणि छे \frac{य}{२} = ख \quad [कलकत्ता १९१९]$$

(१५) सिद्ध करा—

$$y^{(छि-छेल)} \times r^{(छेल-छेय)} \times छ^{(छेय-छेर)} = १$$

(१६) सिद्ध करा—

$$छेलक \times छेगख \times छेकग = १$$

प्रकरण चवदावे

घातांक-श्रेढी आणि छेदा-श्रेढी

(exponential and logarithmic series)

१४.१ e^x ह्या प्रतीकाचा (symbol) निश्चित अर्थ आपल्याला माहीत झाला आहे. आता e^x चा, x च्या आरोही घातांमध्ये विस्तार करून त्यावरून, ज्यांचा उपयोग निर-निरालया संख्यांचे छेदागणन करण्याकडे होतो. अशा कांही महत्वाच्या श्रेढ्या काढू.

१४.२ e^x चा x च्या आरोही घातांत विस्तार करणे.

जर $\frac{1}{s}$ ही राशी संख्येने १ पेक्षा लहान असेल तर

द्विपद प्रमेयानुसार

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{sx} = 1 + sx \times \frac{1}{s} + \frac{sx(sx-1)}{1 \times 2} \times \frac{1}{s^2} + \frac{sx(sx-1)(sx-2)}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{s^3} + \dots$$

$$= 1 + y + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)\left(y - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \dots \dots (१)$$

वरील फलांत जर y ऐवजी १ चा आदेश केला तर

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = 1 + 1 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \dots \dots (२)$$

$$\text{परंतु } \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{sy} = \left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s\right]^y$$

म्हणून

$$\begin{aligned} & 1 + y + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)\left(y - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \\ &= \left[1 + 1 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \dots \dots\right]^y \end{aligned}$$

म्हणून (१) ही थ्रॅडी, (२) ह्या थ्रॅडीचा y चा घात आहे.

स कितीहि मोठा असला तरी ही समता सदैव सत्य आहे.

आता स जसा जसा वाढतो तशा तशा $\frac{1}{स}, \frac{2}{स}, \dots$

यांच्या अर्दी कमी कमी होतात. आणि शेवटी जेव्हा $स \rightarrow \infty$

तेव्हा $\frac{1}{स}, \frac{2}{स}, \dots$ सर्व शून्यप्रवृत्त होतात.

म्हणून 'सीमांती'

$$१ + य + \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} + \dots$$

$$= \left(१ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots \right)^य \dots \dots \dots [आ]$$

$$\left(१ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots \right) \text{ ह्या थोडोचा निर्देश सदैव}$$

'घा' ने केला जातो.

या निर्देशाप्रमाणे (आ) हे फल

$$\text{घा}^य = १ + य + \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} + \dots$$

असे लिहिले जाते.

आता ह्या फलांत य ऐवजी गर चा आदेश केला तर

$$\text{घा}^{\text{गर}} = १ + \text{गर} + \frac{\text{गर}^२}{२} + \frac{\text{गर}^३}{३} + \dots$$

आता घा^{गर} ऐवजी क चा आदेश करा.

अर्थात् घा^{गर} = क

म्हणून $g = \text{छेदांक}$
 आणि $g^2 = \text{कर}$

$$\therefore k^2 = 1 + r \text{ छेदांक} + \frac{r^2}{2} (\text{छेदांक})^2 \\ + \frac{r^3}{3!} [\text{छेदांक}]^3 + \dots$$

या श्रेढीला घातांक श्रेढी म्हणतात.

उपसिद्धांत १— स ला सीमातीत असंख्य वाढविल्यास

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \text{ ची अर्धा घा वसते.}$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e$$

उपसिद्धांत २— स ला सीमातीत असंख्य वाढविल्यास

$$\left(1 + \frac{y}{s}\right)^s \text{ ची अर्धा } \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right)$$

या श्रेढीसमान होते.

आता द्विपद प्रमेयानुसार

$$\left[1 + \frac{y}{s}\right]^s = 1 + s \times \frac{y}{s} + \frac{s(s-1)y^2}{2! s^2} \\ + \frac{s(s-1)(s-2)y^3}{3! s^3} + \dots$$

$$= 1 + y + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{s}\right)}{2} y^2 + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{2}{s}\right)}{3} y^3 + \dots$$

आता जेव्हा s सीमातीत असंख्य होतो

अर्थात् $s \rightarrow \infty$, तेव्हा $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \frac{3}{s}, \dots$ घेरे

राशी शून्यप्रवृत्त होतात.

म्हणून सीमांतों

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{s}\right)^s = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$\text{पण } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{s}\right)^s = e^y$$

१४.३ घरील अनुच्छेदांत राशींचे थोडीरूप फाडतांना केवळ s लाच असंख्य वाढविले आहे. म्हणून

$\frac{1}{s}$ ही राशि सदैव १ पेक्षा लहानच राहते. y आणि e^y च्या अर्धांवर कोणत्याहि प्रकारे प्रतिबंध घातलेला नाही.

आता जेव्हा L संख्येने १ पेक्षा लहान असतो अर्थात् जेव्हा $-1 < L < 1$ असतो तेव्हाच t च्या सर्व अर्धांकरिता

$$= \frac{(-1)^n (\text{छेदांक})^{n-2}}{n-2} \left[\frac{(\text{छेदांक})^2}{n(n-1)} + 2 \frac{\text{छेदांक}}{n-1} + 2 \right]$$

उदाहरण २— खालील श्रेढीचा योग काढा.

$$1 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{3} + \frac{4^2}{4} + \dots \infty$$

$$\text{आता स वे पद पस} = \frac{s^2}{s}$$

$$= \frac{s}{s-1}$$

$$= \frac{s-1+1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}$$

आता 'स' ला २, ३, ४ इत्यादि अर्ही देऊन

$$p_1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$$

$$p_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

.....

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right] \\ + \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right]$$

$$\text{पण } घा = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 + \dots = घा + घा - 1 = 2घा - 1$$

दोन्ही पक्षांत प, मिळवा. पण दिलेल्या श्रेढीवरून प, = 1 आहे.

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots = 1 + घा + घा - 1 \\ = 2घा$$

म्हणून दिलेल्या अनंत श्रेढीचा योग = 2 घा.

$$\text{टीप— पक्ष} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \text{ यामध्ये } s = 1 \text{ ठेवल्यास}$$

उजव्या बाजूंत पहिले पद $\frac{1}{-1}$ येते. परंतु $\frac{1}{-1}$ ला अर्थ

नसल्यामुळे $s = 1$ ठेवून पहिले पद काढतां येत नाही. म्हणून दिलेल्या श्रेढीवरूनच पहिल्या पदाची अर्दा च्यावी लागते.

१४.५ छेदा $(1+y)$ चा y च्या आरोही घातांत विस्तार करणें.

घातांक-प्रमेयावरून

$$\begin{aligned}
 क^2 = 1 + र छेपाक + \frac{र^2(छेपाक)^2}{2} \\
 + \frac{र^3(छेपाक)^3}{3} + \dots
 \end{aligned}$$

त्यांत क = (१ + य) चा आदेश करून

$$\begin{aligned}
 (१ + य)^२ = १ + र[छेपा(१ + य)] + \frac{र^२[छेपा(१ + य)]^२}{२} \\
 + \frac{र^३[छेपा(१ + य)]^३}{३} + \dots \quad (१)
 \end{aligned}$$

हा संबंध प्रस्थापित होतो.

आता य ची अर्ही संख्येने १ पेक्षा लहान असतांना
 अर्थात् $-१ < य < १$ असतांना, आणि र च्या सर्व अर्ही-
 कृतिता द्विपद प्रथेमावरून $(१ + य)^२$ चा विस्तार काढतां
 येतो.

म्हणून $-१ < य < १$ असतांना

$$\begin{aligned}
 (१ + य)^२ = १ + रय + \frac{र(र-१)}{२} य^२ \\
 + \frac{र(र-१)(र-२)}{३} य^३ + \dots \quad (२)
 \end{aligned}$$

(१) आणि (२) या संबंधांत घाम पक्ष सर्वांगसम आहेत.
 म्हणून उजवे पक्षहि सर्वांगसम आहेत.

$$\therefore 1 + ry + \frac{r(r-1)y^2}{2} + \frac{r(r-1)(r-2)y^3}{6} + \dots$$

$$= 1 + r \text{ छेदा } (1+y) + \frac{r^2 [\text{छेदा } (1+y)]^2}{2}$$

$$+ \frac{r^3 [\text{छेदा } (1+y)]^3}{6} + \dots \dots (3)$$

(३) हा संबंध ऐकात्म्य आहे.

म्हणून दोन्ही पक्षांत 'र' चे आणि 'र' च्या घातांचे गुणक समान आहेत.

घाम पक्षांतील 'र' चा गुणक = छेदा

दक्षिण पक्षांतील 'र' चा गुणक

$$= y + \frac{(-1)y^2}{2} + \frac{(-1)(-2)y^3}{6}$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)y^4}{24} + \dots \dots \dots$$

गुणकांना समीकृत करून

$$\text{छेदा } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots \dots;$$

$$-1 < y < 1$$

या श्रेढीला छेदा-श्रेढी म्हणतात.

$$१४.५१ \text{ छेदा } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots \dots$$

या विस्तारांत य ऐवजी (-य) लिहून

$$\therefore \text{छेदा } (1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \dots\dots\dots$$

$$[-1 < -y < 1]$$

१४.६ कोणत्याहि यशीची छेदा फाटणे— १४.५
आणि १४.५१ या अनुच्छेदांवरून $-1 < y < 1$ असल्यास

$$\text{छे } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{आणि छे } (1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots\dots\dots(२)$$

(१) मधून (२) उणे करून

$$\text{छे } \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = 2 \left[y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right] \dots\dots\dots(३)$$

$$\text{आता } \frac{1+y}{1-y} = \frac{ठ}{ट}$$

$$\text{अर्थाचे } y = \frac{ठ-ट}{ठ+ट} \text{ आता य ऐवजी } \frac{ठ-ट}{ठ+ट} \text{ चा}$$

आदेश करून (३) थेंदीचें खालील थेंदींत रूपांतर होतें.

$$\text{छे } \frac{ठ}{ट} = 2 \left[\frac{ठ-ट}{ठ+ट} + \frac{1}{3} \left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{ठ-ट}{ठ+ट} \right)^5 + \dots\dots \right]$$

जाता ठ ऐवजी (ट+१) चा आदेश करून

$$\text{छे } \frac{\tau+1}{\tau} = 2 \left[\frac{1}{2\tau+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\tau+1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\tau+1} \right)^3 + \dots \right]$$

ट=१, २, ३, घेतल्यास

$$\text{छे } २ = २ \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^3} + \dots \right] \dots (४)$$

$$\text{छे } \frac{३}{२} = २ \left[\frac{1}{५} + \frac{1}{३} \times \frac{1}{५^2} + \frac{1}{५ \times ५^3} + \dots \right] \dots (५)$$

(४) ह्या फलाव्या उजव्या पक्षांतील धंदीचा योग .६९३१४७ येतो.

म्हणून छे २ = .६९३१४७

$$(५) \text{ मध्ये छे } \frac{३}{२} = \text{छे } ३ - \text{छे } २$$

आता छे २ ची अर्हा काढली आहे.

(५) च्या उजव्या पक्षांताल धंदीचा योग काढून

$$\text{छे } ३ - \text{छे } २ = .४०५४६५$$

$$\therefore \text{छे } ३ = .४०५४६५ + .६९३१४७ \\ = १.०९८६१२$$

अशा प्रकारे कोणत्याहि राशीची घा-आधारी छेदा अपेक्षित परिशुद्धतच्या अंशापर्यंत काढतां येते.

१४.७ उदाहरण १—

छे $(१ - ५य + ६य^२)$ चा 'य' च्या आरोही घातांत विस्तार करा, आणि सामान्यपद काढा.

$$१ - ५य + ६य^२ = (१ - ३य) (१ - २य)$$

$$\therefore \text{छे } (१ - ५य + ६य^२) = \text{छे}(१ - ३य) + \text{छे}(१ - २य)$$

$$\text{आता छे } (१ - ३य) = - \left[३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\text{आणि छे } (१ - २य) = - \left[२य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\therefore \text{छे } (१ - ५य + ६य^२) = - \left[३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$- \left[२य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\text{आता सामान्य पद प}_n = - \frac{(३य)^n}{n} - \frac{(२य)^n}{n}$$

$$= - \frac{य^n}{n} (३^n + २^n)$$

आता, न ला १, २, ३, या अर्हा देऊन १ लें, २ रें, ३ रें, पदें प्राप्त होतात आणि

$$\text{म्हणून छे } (१ - ५य + ६य^२) = - \frac{य}{१} (५) - \frac{य^२}{२} (१३)$$

$$- \frac{य^३}{३} (३५) \dots \dots \dots$$

उदाहरण २— छे $(१-य+य^२)$ चा य च्या आरोही घातांत विस्तार करा.

$$\begin{aligned}\text{आता } १-य+य^२ &= \frac{(१-य+य^२)(१+य)}{१+य} \\ &= \frac{१+य^३}{१+य}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{म्हणून छे } (१-य+य^२) &= छे \frac{१+य^३}{१+य} \\ &= छे(१+य^३) - छे(१+य) \\ &= \left[य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \dots \right] \\ &\quad - \left[य - \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{३} - \frac{य^४}{४} + \dots \right] \\ &= -य + \frac{य^२}{२} + २\frac{य^३}{३} + \frac{य^४}{४} - \frac{य^५}{५} \dots\end{aligned}$$

उदाहरण ३— $य^२ - तय + य = ०$ या समीकाराच्या मूळांचा अ आणि आ यांनी निर्देश केल्यास

$$\begin{aligned}\text{छे } (१+तय+यय^२) &= \frac{(अ+आ)}{१} य - \frac{अ^२+आ^२}{२} य^२ \\ &\quad + \frac{अ^३+आ^३}{३} य^३ - \dots\end{aligned}$$

हैं दाखवा.

$य^२ - तय + य = ०$ ची अ आणि आ हीं मूळे

असत्यामुळे

$$अ + आ = त$$

$$अ आ = य$$

$$\begin{aligned} \text{आता } (१ + तय + यय^२) &= १ + (अ + आ) य + अआय^२ \\ &= (१ + अय) (१ + आय) \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून छे } (१ + तय + यय^२)$$

$$= \text{छे } [(१ + अय) (१ + आय)]$$

$$= \text{छे } (१ + अय) + \text{छे } (१ + आय)$$

$$\begin{aligned} &= \left[अय - \frac{अ^२य^२}{२} + \frac{अ^३य^३}{३} - \frac{अ^४य^४}{४} + \dots \right] \\ &\quad + \left[आय - \frac{आ^२य^२}{२} + \frac{आ^३य^३}{३} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (अ + आ) य - \frac{अ^२ + आ^२}{२} य^२ \\ &\quad + \frac{अ^३ + आ^३}{३} य^३ - \dots \end{aligned}$$

१४.८ घा ही राशि असंमेय (incommensurable) आहे हे सिद्ध करणे.

या अनुच्छेदांत घा ही राशि पूर्णांक किंवा भिन्न नाही हे आपण सिद्ध करू.

$$\text{आता घा} = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots \infty \dots (अ)$$

(१) वरील श्रेढीवरून, घा > २ हे उघड आहे.

$$१ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{२^३} + \dots \dots \dots \infty \text{ (आ)}$$

या श्रेढीतील पहिली ३ पदे क्रमशः घा च्या विस्तारां-
तील पहिल्या ३ पदांच्या समान असून चवथ्या पदापासून (आ)
तील प्रत्येक पद (अ) च्या संवादी पदापेक्षा मोठे आहे.

$$\therefore १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \dots \dots \dots \infty$$

$$< १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२^२} + \dots \dots \dots \infty$$

$$\text{अर्थात् घा} < १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२^२} + \dots \dots \dots \infty$$

$$\text{किंवा घा} < १ + \frac{१}{१ - \frac{१}{२}}$$

$$< १ + २$$

$$\therefore \text{घा} < ३$$

$$\text{यावरून } २ < \text{घा} < ३$$

यावरून घा हा पूर्णांक नसून त्याची अर्धा २ आणि ३
मध्ये आहे हे स्पष्ट आहे.

(२) आता, शून्य असल्यास, घा हा घन भिन्न आहे असे
समजा. ट आणि ठ ह्या घन पूर्णांक राशी असल्यास घा,

ठ या रूपांत लिहितां येतो.

$$\therefore \frac{\text{ठ}}{\text{ट}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\text{ट}} + \frac{1}{\text{ट}+1} + \frac{1}{\text{ट}+2} + \dots$$

दोन्ही पक्षांस ट ने गुणा म्हणजे

$$\begin{aligned} \text{ठ } \underline{\text{ट}-1} &= \underline{\text{ट}} + \underline{\text{ट}} + \frac{\underline{\text{ट}}}{2} + \dots + 1 + \frac{1}{\text{ट}+1} \\ &\quad + \frac{1}{(\text{ट}+1)(\text{ट}+2)} + \dots \end{aligned}$$

ट हा पहिल्या ट प्राकृतिक संख्याचा गुणाकार आहे. म्हणून ठ ट-1, ट, ट-1, आणि 1 या सर्व राशी घन पूर्णांक आहेत.

$$\therefore \text{ठ } \underline{\text{ट}-1} = \text{पूर्णांक} + \frac{1}{(\text{ट}+1)} + \frac{1}{(\text{ट}+1)(\text{ट}+2)} + \dots$$

$$\text{आता } \frac{1}{\text{ट}+1} + \frac{1}{(\text{ट}+1)(\text{ट}+2)} + \dots$$

हा लघ्वंश भिन्न आहे. म्हणून हा पहिल्या पदांन मोठा आहे

$$\text{आणि } \frac{1}{\text{ट}+1} + \frac{1}{(\text{ट}+1)^2} + \frac{1}{(\text{ट}+1)^3} + \dots \infty \text{ या गुणोत्तर}$$

धेढीच्या योगापेक्षा अर्थात् $\frac{1}{2}$ पेक्षा लहान आहे. पण वामपक्ष पूर्णांक आहे.

यावरून पूर्णांक = पूर्णांक + लघ्वंश भिन्न

पण हें विसंगत आहे.

म्हणून या हा एक भिन्न आहे ही आपली मानना चूक आहे.

म्हणून या ही पूर्णांक किंवा भिन्न राशि नाही.

आतां केवळ पूर्णांक किंवा भिन्न राशीच संशेय असतात.

म्हणून या ही असंशेय राशि आहे.

प्रश्नसंग्रह २०

(१) $\frac{1}{y} [1 - x^y]$ चा y च्या आरोही घातांत y^x पर्यंत विस्तार करा. [वनारस १९३०]

(२) x^y चा y च्या आरोही घातांत y^x पर्यंत विस्तार करा.

(३) $\frac{1}{2x} [x^{2x} - x^{-2x}]$ चा x च्या आरोही घातांत विस्तार करा. $[x = \sqrt{-1}]$

(४) $\frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3} + \dots$

$$(आ) \quad \left| \begin{array}{ccc} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{array} \right| \text{ या निश्चायकाचे}$$

$$\text{विस्तार } क_1(ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - ख_1(क_2 ग_3 - क_3 ग_2) \\ + ग_1(क_2 ख_3 - क_3 ख_2)$$

$$\text{किंवा } क_1(ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - क_2(ख_1 ग_3 - ख_3 ग_1) \\ + क_3(ख_1 ग_2 - ख_2 ग_1) \text{ हे आहेत.}$$

हीं फलें अन्य रूपांत पुढीलप्रमाणे लिहितां येतात.

$$क_1 \left| \begin{array}{cc} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{array} \right| - ख_1 \left| \begin{array}{cc} क_2 & ग_2 \\ क_3 & ग_3 \end{array} \right| + ग_1 \left| \begin{array}{cc} क_2 & ख_2 \\ क_3 & ख_3 \end{array} \right|$$

किंवा

$$क_1 \left| \begin{array}{cc} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{array} \right| - क_2 \left| \begin{array}{cc} ख_1 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{array} \right| + क_3 \left| \begin{array}{cc} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{array} \right|$$

पहिल्या प्रकारांत निश्चायकांच्या प्रथम पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत त्याचा विस्तार केला आहे. आणि दुसऱ्या प्रकारांत प्रथम स्तंभातील संघटकांच्या पदांत त्याच निश्चायकाचा विस्तार केला आहे.

आता निश्चायकाचा विस्तार पहिल्या प्रकाराने वसा करतात तें पाहूं. हीच रीति दुसऱ्या प्रकारांत उपयोगांत आणली जाते.

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत क₁ आहे त्या स्तंभाचें आणि पंक्तीचें अपमार्जन करून (delete) उरलेला निश्चायक हाच

क, चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे. ह्यावरून $\left| \begin{array}{cc} ख_१ & ग_१ \\ ख_२ & ग_२ \end{array} \right|$ हा
क, चा गुणक आहे.

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत ख, आहे त्या स्तंभाचे
आणि त्या पंक्तीचे अपमार्जन करून उरलेला निश्चायक हाच
ख, चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे.

ह्यावरून, ख, चा चिह्ननिरपेक्ष गुणक

$$\left| \begin{array}{cc} फ_१ & ग_१ \\ फ_२ & ग_२ \end{array} \right|$$

ज्या स्तंभांत आणि पंक्तींत ग, आहे त्या स्तंभाचे
आणि पंक्तीचे अपमार्जन करून उरलेला निश्चायक ग, चा
चिह्ननिरपेक्ष गुणक आहे.

$$\text{ह्यावरून, ग, चा गुणक} = \left| \begin{array}{cc} फ_१ & ख_१ \\ फ_२ & ख_२ \end{array} \right|$$

आता, एखाद्या निश्चायकाच्या विस्तारांत त्यांतील विशिष्ट
पदांचे चिह्न निश्चित करण्यासाठी खालील नियमाचा उपयोग
करतात.

निश्चायकाच्या विस्तारांत एखाद्या विशिष्ट संघटकाचे चिह्न
ठरवावयाचे असल्यास अग्रसंघटकापासून, स्तंभावरून किंवा
पंक्तीवरून किंवा दोहोंवरून त्याचे स्थान मोजा. या स्थानाची
संख्या सम किंवा विषम असेल तदनुसार त्याचे 'चिह्न' ऋण
किंवा धन असते.

अशा प्रकारच्या योग्य चिन्हांनी घेतलेल्या पदांचा
बीजीय योग म्हणजेच निश्चायकाचा विस्तार होय.

उदाहरण— विस्तार करा.

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix}$$

पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix} = ७ \begin{vmatrix} ४ & ७ \\ १ & ७ \end{vmatrix} - १ \begin{vmatrix} २ & २० \\ १ & ७ \end{vmatrix} + ३ \begin{vmatrix} २ & २० \\ ४ & ७ \end{vmatrix}$$

$$= ७(२८ - ७) - (१४ - २०) + ३(१४ - ८०)$$

$$= १४७ + ६ + ४२ - २४०$$

$$= -४५$$

१५.३ निश्चायकाचे गुणधर्म.

कोणत्याही वर्णांच्या निश्चायकास लागू पडणारे सर्व-साधारण गुणधर्म खाली त्रिवर्ण निश्चायक उदाहरण घेउन सिद्ध केले आहे.

$$\begin{vmatrix} क, & ख, & ग, \\ क, & ख, & ग, \\ क, & ख, & ग, \end{vmatrix} \text{ हे त्रिवर्ण निश्चायकाचे प्रमाण रूप आहे.}$$

(१) स्तंभांचे पंक्तींत आणि पंक्तींचे स्तंभांत व्यतिहरण केल्यास निश्चायकाच्या अर्हतेत परिवर्तन होत नाही.

$$\text{अर्थात् } \begin{vmatrix} क, & ख, & ग, \\ क, & ख, & ग, \\ क, & ख, & ग, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} क, & क, & क, \\ ख, & ख, & ख, \\ ग, & ग, & ग, \end{vmatrix}$$

उदाहरण— विस्तार करा.

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix}$$

पहिल्या स्तंभातील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ ३ & १ & ७ \end{vmatrix} = ७ \begin{vmatrix} ४ & ७ \\ १ & ७ \end{vmatrix} - १ \begin{vmatrix} २ & २० \\ १ & ७ \end{vmatrix} + ३ \begin{vmatrix} २ & २० \\ ४ & ७ \end{vmatrix}$$

$$= ७(२८ - ७) - (१४ - २०) + ३(१४ - ८०)$$

$$= १४७ + ६ + ४२ - २४०$$

$$= -४५$$

१५.३ निश्चायकाचे गुणधर्म.

कोणत्याही वर्णाच्या निश्चायकास लागू पडणारे सर्व-साधारण गुणधर्म खाली त्रिवर्ण निश्चायक उदाहरण घेउन सिद्ध केले आहे.

$\begin{vmatrix} क, ख, ग, \\ क, ख, ग, \\ क, ख, ग, \end{vmatrix}$ हे त्रिवर्ण निश्चायकाचे प्रमाण रूप आहे.

(१) स्तंभांचे पंक्तीत आणि पंक्तींचे स्तंभांत व्यतिहरण केल्यास निश्चायकाच्या अर्हतेत परिवर्तन होत नाही.

$$\text{अर्थात् } \begin{vmatrix} क, ख, ग, \\ क, ख, ग, \\ क, ख, ग, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} क, क, क, \\ ख, ख, ख, \\ ग, ग, ग, \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकांच्या पहिल्या पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत विस्तार केल्यास

दक्षिण पक्ष =

$$क_1 (ख_2 ग_2 - ग_2 ख_2) - क_2 (ख_1 ग_2 - ग_1 ख_2) \\ + क_3 (ख_1 ग_2 - ग_1 ख_2)$$

पदांची पुनर्रचना करून

दक्षिण पक्ष =

$$क_1 (ख_2 ग_2 - ख_2 ग_2) - ख_1 (क_2 ग_2 - क_2 ग_2) \\ + ग_1 (क_2 ख_2 - क_2 ख_2)$$

$$= क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix} - ख_1 \begin{vmatrix} क_2 & ग_2 \\ क_2 & ग_2 \end{vmatrix} + ग_1 \begin{vmatrix} क_2 & ख_2 \\ क_2 & ख_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} क_1 & ख_2 & ग_2 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}$$

यावरून निश्चायकांतील स्तंभ आणि पंक्ती यांचे व्यतिहरण करूनहि निश्चायकाची अर्हा अपरिवर्तित राहते हे दिसून येते.

(२) कोणत्याहि निश्चायकांत, कोणत्याहि दोन अनुगामी पंक्तीचे किंवा स्तंभांचे व्यतिहरण केले तर त्या निश्चायकाचे चिन्ह बदलते.

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_2 & ग_2 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_2 & ग_2 \end{vmatrix} \text{ ह्या निश्चायकांत } क_1, क_2, क_3 \text{ आणि}$$

ख_1, ख_2, ख_3 ह्या स्तंभांचे व्यतिहरण करून आणि येणाऱ्या निश्चायकाचे चिन्ह बदलून

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ख_1 & क_1 & ग_1 \\ ख_2 & क_2 & ग_2 \\ ख_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

आता, दोन्ही निश्चायकांचा पहिल्या पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत विस्तार करा.

$$\begin{aligned} \text{आता वाम पक्ष} &= क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 \\ &\quad - क_3ग_2) + ग_1(क_2ख_3 - क_3ख_2) \end{aligned}$$

आणि दक्षिण पक्ष =

$$\begin{aligned} & - [ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) - क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) \\ &\quad + ग_1(ख_2क_3 - ख_3क_2)] \\ &= -ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) + क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) \\ &\quad - ग_1(ख_2क_3 - ख_3क_2) \\ &= क_1(ख_2ग_3 - ख_3ग_2) - ख_1(क_2ग_3 - क_3ग_2) \\ &\quad + ग_1(ख_3क_2 - क_3ख_2) \end{aligned}$$

वाम पक्ष आणि दक्षिण पक्ष समान असल्यामुळे इष्ट प्रमेय सिद्ध होतें.

(३) एखाद्या निश्चायकात दोन स्तंभ, किंवा दोन पंक्ती सर्वांगसम असल्यास निश्चायकाची अर्हा शून्य असते.

$$\begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} \quad \text{ह्या निश्चायकांत पहिले दोन स्तंभ}$$

सर्वांगसम आहेत.

आता दुसऱ्या गुणधर्मावरून $\begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$ ह्या निश्चा-

यकांतील पहिल्या दोन स्तंभांचे व्यतिहरण केल्यास त्याचे चिन्ह बदलते. परंतु पहिले दोन स्तंभ सर्वांगसम असल्यामुळे निश्चायकाचे रूप तेच राहते.

$$\text{म्हणून } \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात् } 2 \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{म्हणून } \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = 0$$

(४) एखाद्या निश्चायकाच्या कोणत्याहि स्तंभांतील किंवा कोणत्याहि पंक्तीतील संघटकांना प ने गुणून येणारा निश्चायक, दिलेल्या निश्चायकाच्या प-पट असतो.

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \text{ या निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांतील}$$

संघटकांना प ने गुणून येणारा निश्चायक

$$= \begin{vmatrix} पक_1 & ख_1 & ग_1 \\ पक_2 & ख_2 & ग_2 \\ पक_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

ह्या निश्चायकाचा, पहिल्या स्तंभांतील संघटकांच्या पदांचा विस्तार केल्यास

$$\begin{vmatrix} पक_1 & ख_1 & ग_1 \\ पक_2 & ख_2 & ग_2 \\ पक_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

$$= पक_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - पक_2 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + पक_3 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}$$

$$= प \left[क_1 \begin{vmatrix} ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} - क_2 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + क_3 \begin{vmatrix} ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ग_2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= प \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

उपसिद्धांत १—

निश्चायकांतील एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटक क्रमशः दुसऱ्याच एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटकांच्या प-पटी समान असल्यास त्याची अर्हा शून्य असते. अगोदर चवथ्या आणि नंतर तिसऱ्या गुणधर्माचा उपयोग करून बरील विधान सिद्ध करता येते.

उपसिद्धांत २—

निश्चायकांतील एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील सर्व संघटकांचे चिन्ह बदलले तर त्या निश्चायकाचेहि चिन्ह बदलते.

चिन्ह बदलून येणाऱ्या निश्चायकातून -१ हा साधारण अवयव बाहेर काढून त्याची अर्हा -१×दिलेला निश्चायक

अशी लिहितां येते. अर्थात् दिलेल्या निश्चायकाचे 'चिन्ह' बदलते.

(५) एखाद्या निश्चायकाच्या एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभातील सर्व संघटक दोन किंवा अधिक राशींचे योग असल्यास, तो निश्चायक दोन किंवा अधिक निश्चायकांच्या योगांच्या रूपांत व्यक्त करतां येतो.

$$\begin{vmatrix} k_1 + a_1 & x_1 & g_1 \\ k_1 + a_2 & x_2 & g_2 \\ k_3 + a_3 & x_3 & g_3 \end{vmatrix} \text{ ह्या निश्चायकाच्या पहिल्या}$$

स्तंभातील प्रत्येक संघटक दोन राशींचा योग आहे.

आता पहिल्या स्तंभाच्या संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार करा. म्हणजे निश्चायक

$$= (k_1 + a_1) \begin{vmatrix} x_2 & g_2 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix} - (k_2 + a_2) \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix} + (k_3 + a_3) \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_2 & g_2 \end{vmatrix}$$

$$= k_1 \begin{vmatrix} x_2 & g_2 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} x_2 & g_2 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$- a_2 \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_3 & g_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_2 & g_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} x_1 & g_1 \\ x_2 & g_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k_1 & x_1 & g_1 \\ k_2 & x_2 & g_2 \\ k_3 & x_3 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & g_1 \\ a_2 & x_2 & g_2 \\ a_3 & x_3 & g_3 \end{vmatrix}$$

(६) एखाद्या निश्चायकाच्या कोणत्याहि एका पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटक हे इतर प्रत्येक पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघादी संघटकांना अचल गुणकांनी (निरनिराळ्या पंक्तींना, किंवा स्तंभांना निरनिराळ्या अचलांनी) गुणून येणाऱ्या राशींच्या बीजीय योगासमान असतील तर तो निश्चायक शून्यासमान असतो.

$$\begin{vmatrix} टख_1 + ठग_1 & ख_1 & ग_1 \\ टख_2 + ठग_2 & ख_2 & ग_2 \\ टख_3 + ठग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \text{ या निश्चायकाचा पहिला}$$

स्तंभ, दिलेल्या प्रतियंधानुसार निर्माण झाला आहे.

दिलेला निश्चायक

$$= \begin{vmatrix} टख_1 & ख_1 & ग_1 \\ टख_2 & ख_2 & ग_2 \\ टख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ठग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ठग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ठग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \quad (५ \text{ वरून})$$

$$= \begin{vmatrix} ख_1 & ख_1 & ग_1 \\ ख_2 & ख_2 & ग_2 \\ ख_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \quad (४ \text{ वरून})$$

$$= 0 \quad (३ \text{ वरून})$$

(७) कोणत्याहि निश्चायकाच्या कोणत्याहि एखाद्या पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील प्रत्येक संघटकांत इतर पंक्तीतील किंवा स्तंभांतील संघटकांना अचल गुणकांनी गुणून ते मिळविले तर तो निश्चायक अपरिवर्तित राहतो.

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \text{ ह्या निश्चायकाच्या दुसऱ्या आणि}$$

तिसऱ्या स्तंभांतील संघटकांना क्रमशः ट आणि ठ यांनी गुणून येणाऱ्या राशी पहिल्या स्तंभांतील संघटकांत क्रमशः मिळवा म्हणजे आपल्याला

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline क_1 + टख_1 + ठग_1 & ख_1 & ग_1 \\ \hline क_2 + टख_2 + ठग_2 & ख_2 & ग_2 \\ \hline क_3 + टख_3 + ठग_3 & ख_3 & ग_3 \\ \hline \end{array} \quad \text{ह्या निश्चायक}$$

मिलतो. ह्या निश्चायकाचें नि ने अभिधान केल्यास

$$\text{नि} = \begin{array}{|l|l|l|} \hline क_1, ख_1, ग_1 \\ \hline क_2, ख_2, ग_2 \\ \hline क_3, ख_3, ग_3 \\ \hline \end{array} + ट \begin{array}{|l|l|l|} \hline ख_1, ख_2, ख_3 \\ \hline \end{array} + ठ \begin{array}{|l|l|l|} \hline ग_1, ग_2, ग_3 \\ \hline \end{array}$$

दक्षिण पक्षांतील शेवटच्या दोन निश्चायकांच्या अर्ही

(३) करून शून्य येतात. म्हणून

$$\text{नि} = \begin{array}{|l|l|l|} \hline क_1, ख_1, ग_1 \\ \hline क_2, ख_2, ग_2 \\ \hline क_3, ख_3, ग_3 \\ \hline \end{array}$$

१५.४ उदाहरण १—

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline ख + ग & क & १ \\ \hline ग + क & ख & १ \\ \hline क + ख & ग & १ \\ \hline \end{array} \quad \text{ह्या निश्चायकाची}$$

अर्ही शून्य आहे हें दाखवा.

दुसऱ्या स्तंभांतील संघटक क्रमशः पहिल्या स्तंभांतील संघटकांत मिळवा. निश्चायकाचें नि ने अभिधान केल्यास

$$\text{नि} = \begin{array}{|l|l|l|} \hline ख + ग + क & क & १ \\ \hline ग + क + ख & ख & १ \\ \hline क + ख + ग & ग & १ \\ \hline \end{array}$$

आता पहिल्या स्तंभांतील प्रत्येक संघटकांत (क + ख + ग)

हा गुणक आहे. तो बाहेर काढल्यानंतर

$$\text{नि} = (\text{क} + \text{ख} + \text{ग}) \begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & १ \end{vmatrix}$$

$$\text{आता } \begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & १ \end{vmatrix} \text{ चे दोन स्तंभ सर्वांगसम आहेत.}$$

$$\text{म्हणून } \begin{vmatrix} १ & \text{क} & १ \\ १ & \text{ख} & १ \\ १ & \text{ग} & १ \end{vmatrix} = ०$$

$$\text{म्हणून नि} = ०$$

उदाहरण २—

$$\begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^२ \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^२ \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & \text{क}^२ & \text{क}^३ \\ १ & \text{ख}^२ & \text{ख}^३ \\ १ & \text{ग}^२ & \text{ग}^३ \end{vmatrix}$$

हे ऐकात्म्य सिद्ध करा.

जाम पक्षाच्या निश्चायकार्ये नि ने अभिधान करून

$$\text{नि} = \begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^२ \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^२ \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^२ \end{vmatrix}$$

आता पहिल्या पंक्तीस क ने, दुसऱ्या पंक्तीस ख ने आणि तिसऱ्या पंक्तीस ग ने गुणून

$$\text{कखग नि} = \begin{vmatrix} \text{कखग} & \text{क}^२ & \text{क}^३ \\ \text{कखग} & \text{ख}^२ & \text{ख}^३ \\ \text{कखग} & \text{ग}^२ & \text{ग}^३ \end{vmatrix}$$

दक्षिण पक्षांतील निश्चायकार्य्या पहिल्या स्तंभांतील घटकांतील क ख ग हा साधारणगुणक बाहेर काढून

$$\text{कखग नि} = \text{पाखग} \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात् नि} = \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

$$\text{म्हणजेच} \begin{vmatrix} \text{खग} & क & क^२ \\ \text{गक} & ख & ख^२ \\ \text{फख} & ग & ग^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \\ १ & ग^२ & ग^३ \end{vmatrix}$$

$$\text{उदाहरण ३—} \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} \text{ ची अर्हा काढा.}$$

दिलेल्या निश्चायकाच्या दुसऱ्या स्तंभाचे संघटक क्रमशः पहिल्या स्तंभाच्या संघटकांतून आणि तिसऱ्या स्तंभाचे संघटक क्रमशः दुसऱ्या स्तंभाच्या संघटकांतून उर्गे फक्तून

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ क-ख & ख-ग & ग \\ क^२-ख^२ & ख^२-ग^२ & ग^२ \end{vmatrix}$$

आता दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकाच्या पहिल्या स्तंभांत (क-ख) आणि दुसऱ्या स्तंभांत (ख-ग) हे साधारण गुणक आहेत. ते बाहेर काढून

$$\text{दक्षिण पक्ष} = (क-ख)(ख-ग) \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ १ & १ & ग \\ क+ख & ख+ग & ग^२ \end{vmatrix}$$

आता दक्षिण पक्षाच्या निश्चायकाचा पहिल्या पंक्तीतील संघटकाच्या पदांमध्ये विस्तार केल्यास दक्षिण पक्ष

$$= (क-ख) (ख-ग) [ख+ग-क-ख]$$

$$= (क-ख) (ख-ग) (ग-क)$$

$$\text{म्हणून } \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ क & ख & ग \\ क^२ & ख^२ & ग^२ \end{vmatrix} = (क-ख) (ख-ग) (ग-क)$$

१५.५ उपनिश्चायक (minors) आणि सहगुणक (co-factors)

$$\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \end{vmatrix} \text{ ह्या निश्चायकांत } क_१ \text{ हा संघटक}$$

पहिल्या पंक्तीत आणि पहिल्याच स्तंभांत आहे. पहिली पंक्ति आणि पहिला स्तंभ यांचें निग्रहण (suppress) करून उरलेल्या निश्चायकास $क_१$ चा उपनिश्चायक म्हणतात.

निश्चायकाचें 'नि' ने अभिधान आणि $क_१$ च्या उपनिश्चायकाचें $निक_१$ ने अभिधान करतात. त्याचप्रमाणे $निक_१$, $क_२$, $निक_२$, $क_३$, $निक_३$, यांनी क्रमशः $ख_१$, $ख_२$, $ख_३$ आणि $ग_१$, $ग_२$, $ग_३$ यांच्या उपनिश्चायकांचें अभिधान करतात.

ह्यावरून पहिल्या पंक्तीतील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$नि = क_१, निक_१, -ख_१, निक_२, +ग_१, निक_३$$

त्याप्रमाणे पहिल्या स्तंभातील संघटकांच्या पदांत दिलेल्या निश्चायकाचा विस्तार केल्यास

$$नि = क_१, निक_१, -क_२, निक_२, +क_३, निक_३$$

निश्चायकांतील पळाद्या संघटकाचा सहगुणक म्हणजे त्याच संघटकाचा, योग्य चिन्नासहित घेतलेला उपनिश्चायक होय. म्हणून सहगुणकाला चिह्नित उपनिश्चायक असेंहि

म्हणतात.

सहगुणकाच्या उपयोगाने निश्चायकाच्या विस्तारांत सर्व पदांची चिह्ने तींच असतात.

कोणत्याहि संघटकाच्या सहगुणकाचें, त्याच संघटकाच्या आकारान्त अक्षराने अभिधान करतात. उदा० फ_१, ख_१, ग_१, यांच्या सहगुणकांचें क्रमशः का_१, खा_१, गा_१, यांनी अभिधान करतात. /

निश्चायकाचें नि ने अभिधान करून सहगुणकाचा उपयोग केल्यास

नि = फ, का, + ख, खा, + ग, गा,

किंवा नि = फ, का, + क, का, + क, का,

पक्षाद्या संघटकाचा सहगुणक, योग्य चिह्नासहित घेतलेला उपनिश्चायक असल्यामुळे, उपनिश्चायकावरून त्याच्या संवादी सहगुणकाची अर्ही काढण्यासाठी खालील नियमाचा उपयोग करतात.

नियम— ज्या संघटकाच्या सहगुणकाची अर्ही काढण्याची आहे त्याचें स्थान पंक्तीवरून, स्तंभावरून किंवा दोहोंवरून अग्र संघटकापासून कितवें आहे तें पहा. या स्थानाची संख्या विषम अथवा सम असेल तदनुसार त्याचा सहगुणक त्याच्या संवादी उपनिश्चायकासमान किंवा ऋण चिन्हासहित घेतलेल्या त्याच उपनिश्चायकासमान असतो.

उदाहरण— ख, चा सहगुणक खा, आणि उपनिश्चायक नित, आहे. आता ख, चें स्थान अग्रसंघटक क, पासून चवथें म्हणजे सम असल्यामुळे खा, = -नित.

प्रश्नसंग्रह २१

अर्ही काढा—

$$(१) \begin{vmatrix} २४ & ८ & ३ \\ १५ & ७ & १ \\ ११ & २ & ४ \end{vmatrix}$$

$$(२) \begin{vmatrix} १९ & २ & १७ \\ ७ & ५ & २ \\ १२ & ३ & ९ \end{vmatrix}$$

$$(३) \begin{vmatrix} ४ & २ & ५ \\ १ & १ & ६ \\ ७ & ३ & ० \end{vmatrix}$$

$$(४) \begin{vmatrix} ५२ & १३ & ६७ \\ ७० & १७ & ८९ \\ ७२ & १९ & १०२ \end{vmatrix}$$

$$(५) \begin{vmatrix} क & ख & छ \\ ज & ख & च \\ छ & च & ग \end{vmatrix}$$

$$(६) \begin{vmatrix} १ & ओ & ओ^२ \\ ओ & ओ^२ & १ \\ ओ^२ & १ & ओ \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (ओ हे १ \\ चें धर्ममूलें \\ आहे) \end{matrix}$$

(७) खालील निश्चायकाची अर्ही शून्य आहे हें दाखवा.

$$\begin{vmatrix} १ & क & क^२ - खग \\ १ & ख & ख^२ - कग \\ १ & ग & ग^२ - कख \end{vmatrix} = ०$$

$$(८) \begin{vmatrix} क+ख & ख+ग & ग+क \\ त+थ & थ+द & द+त \\ ट+ठ & ठ+ड & ड+ट \end{vmatrix} = २ \begin{vmatrix} क & ख & ग \\ त & थ & द \\ ट & ठ & ड \end{vmatrix} \quad \text{आहे हें दाखवा.}$$

$$(९) \begin{vmatrix} य & क_१ & क_२ \\ क_१ & य & क_२ \\ क_१ & क_२ & य \end{vmatrix} = (य - क_१)(य - क_२)(य + क_१ + क_२)$$

आहे हें दाखवा.

[रंगून १९३९]

$$(१०) \begin{vmatrix} ख^२ग^२ & खग & ख+ग \\ ग^२क^२ & गक & ग+क \\ क^२ख^२ & कख & क+ख \end{vmatrix} \text{ ची अर्ही काढा.}$$

उत्तरें

प्रश्नसंग्रह १

- (१) $y=3, r=4$ (२) $y=9, r=6$
 (३) $y=\frac{3}{2}, r=\frac{5}{2}$ (४) $y=-\frac{4}{3}, r=\frac{7}{3}$

प्रश्नसंग्रह २

- (१) (अ) $\frac{y^3}{r^3}$ (आ) $\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$ (इ) $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$ (ई) $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}}$
 (उ) $\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$ (ऊ) $\frac{1}{y^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}}}$
- (२) (अ) २ (आ) $\sqrt{3}$ (इ) $\frac{32}{3}$ (ई) $\frac{16}{25}$
- (३) $\frac{r^4}{y}$ (४) दुसरी मोठी आहे. (५) $\frac{27}{8}$
- (६) (अ) $y-1$ (आ) $y^{\frac{3}{2}}-r^{\frac{3}{2}}$ (इ) $4y^2+4y^{-2}+1$

$$(७) \quad y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$(८) \quad (क) \quad \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \quad (ख) \quad \frac{y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}$$

$$(ग) \quad y^{\frac{1}{2}} \quad (घ) \quad y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$(ङ) \quad 1 \quad (च) \quad y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$(छ) \quad \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \quad (ज) \quad 1$$

$$(९) \quad (क) \quad x^2 - 2 \quad (ख) \quad x^2 - 3x \quad (ग) \quad x^2 - 4x^2 + 2$$

$$(१४) \quad m = \frac{n}{n-1}$$

प्रश्नसंग्रह ३

$$(१) \quad 4\sqrt{6}, 4 \times 3\sqrt{4}, 2\sqrt{3}, 4 \times 3\sqrt{3}, 2 \times 4\sqrt{16}$$

$$(२) \quad (१) \quad 7 - \sqrt{3}, \quad (२) \quad 3 - \sqrt{4} \quad (३) \quad \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(३) \quad (१) \quad 7^{\frac{1}{2}} - 2 \times 7^{\frac{1}{2}} + 4 \quad (२) \quad 4^{\frac{1}{2}} - 3 \times 4^{\frac{1}{2}} + 9$$

$$(३) \quad 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$(४) \quad (१) \quad 2 - \sqrt{3} \quad (२) \quad \frac{2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$(३) \quad \frac{7 - 3\sqrt{3} - \sqrt{4} + 2\sqrt{16}}{11}$$

$$(५) \frac{2}{3} \sqrt{4} [\sqrt{4} - 1]$$

$$(६) (१) ३-२ \text{ श } (२) १-३ \text{ श } (३) ७-५ \text{ श }$$

$$(७) (१) १७+७ \text{ श } (२) १०+५४ \text{ श }$$

$$(८) (क) \frac{३-२ \text{ श }}{१३} (ख) \frac{७-८ \text{ श }}{११३.५} (ग) \frac{३-\sqrt{-२}}{११}$$

$$(घ) \frac{३२३-३६ \text{ श }}{३२५}$$

$$(९) (१) -१+२ \text{ श } (२) -\frac{१}{५} + \frac{२}{५} \text{ श }$$

$$(३) (३क+२ख)+(३-२कख) \text{ श }$$

$$(४) २(१-\sqrt{३})+२(१+\sqrt{३}) \text{ श }$$

$$(१०) (१) य=२, र=-३ (२) य=३, र=-५$$

$$(३) य=२, र=-२ (४) य=४, र=१$$

$$य=६, र=-\frac{२}{३}$$

$$(११) (१) \pm [३+४ \text{ श }] (२) \pm [३+२ \text{ श }]$$

$$(३) \pm [२-१ \text{ श }]$$

प्रश्नसंग्रह ४

$$(१) (अ) \frac{१}{३} (२९-२९) (आ) ७९-५ (इ) ९९-५$$

$$(ई) \frac{स}{क} (उ) \frac{स^२-स+१}{स}$$

- (२) (अ) ८६७ $\frac{1}{2}$ (आ) ८४० (इ) ९२ $\frac{1}{2}$
 (ई) ६ $\frac{1}{2}$ (उ) ३३२.८५ (ऊ) १३५ $\frac{1}{4}$

(ए) $\frac{s}{2} [(4+s)k - 2x(3+s)]$ (ऐ) s^2

(३) (अ) $\frac{4}{3}, \frac{24}{12}, \frac{4}{2}, \dots$

(आ) ७, १२, १७,

(इ) ६, ११, १६, २१,

(ई) $s^2 + 1 - s, s^2 + 2(1 - s), s^2 + 3(1 - s)$

(उ) $k + \frac{x - k}{2(s + 1)}, k + \frac{x - k}{s + 1}, k + \frac{3(x - k)}{2(s + 1)}$

$$\text{मध्यपद} = \frac{k}{2} + \frac{x}{2}$$

(५) १६५

(६) प._{५०} = १०५; यो._{५०} = २८०० (८) १३, १७, २१

(९) २, ३ $\frac{1}{2}$, ५, ६ $\frac{1}{2}$, ८ (११) ३७ (१२) ७२

(१३) २० (१४) १६ (१५) २५ (१६) १४

(१७) ३६ (१८) २५ (१९) ५०'५०० यष्टी

(२४) $\frac{8}{5}$ (२९) क, ३क, ५क, (३१) - (त + थ)

प्रश्नसंग्रह ५

- (१) (१) -५१२ (२) $\frac{१५}{३२}$
- (३) $-\frac{१२८}{१०९३५}$ (४) $\frac{२^४-१}{३}$
- (२) (१) २०४६ (२) $\frac{१३३}{२५३}$
- (३) $\frac{६३(२+\sqrt{२})}{३२}$ (४) $\frac{८}{३१} \left[1 + (-)^{४+१} \times \left(\frac{३}{४} \right)^४ \right]$
- $\frac{\text{कट} [१ - \text{कठ}]}{१ - \text{कठ}}$
- (५) $\frac{\frac{\text{क}}{\text{य}} \sqrt{\frac{५}{३}} \left[1 - \left(\sqrt{\frac{३\text{य}}{५\text{क}}} \right)^४ \right]}{१ - \sqrt{\frac{३\text{य}}{५\text{क}}}}$
- (३) ३, ६, १२ (४) $\frac{४}{५}, ४, २०$
- (८) ६ (९) $\frac{३^४-१}{२}$
- (१०) (१) $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, १, ३$ (२) ६, १८, ५४, १६२
- (३) $\frac{१६}{२७}, \frac{८}{९}, \frac{४}{३}, २, ३$ (४) ९, ३, १, $\frac{१}{३}, ९$

$$(11) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(12) 3, 12 \quad (16) \frac{k}{n-1} \left[\frac{n(n^2-1)}{n-1} - s \right]$$

[यांत क हें आद्य पद, न ही साधारण निष्पत्ति आहे]

$$(23) \sqrt{mn}, m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (24) 6\frac{1}{3}, 12\frac{1}{3}$$

प्रश्नसंग्रह ६

$$(1) (क) \frac{1}{1-y} + \frac{2y}{(1-y)^2} - \frac{2y^2}{(1-y)^3} - \frac{(2s-1)y^2}{1-y}$$

$$(ख) 8 - \frac{1}{2^{s-2}} - \frac{s}{2^{s-1}}$$

$$(ग) -\frac{7}{6} - \frac{5}{36} [7^{s+1} - 7] + \frac{5s+1}{6} \times 7^{s+1}$$

$$(2) (1) \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) \quad (2) \frac{9}{8} \quad (3) \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$(4) \frac{8+3\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) (क) \frac{3}{6} \quad (ख) \frac{2^{\frac{1}{2}}}{16} \quad (ग) 6 \quad (घ) 1$$

$$(४) (क) \frac{३स(स+१)}{२} + \frac{५}{४}(५स-१)$$

$$(ख) \frac{य(१-यस)}{१-य} + \frac{कस(स+१)}{२} \quad (ग) \frac{कय-कस}{यस-१}$$

$$(घ) कस^२ + ख(२स-१)$$

$$(५) \frac{८}{३} + \frac{१}{३ \times २^{२स-२}} - \frac{१}{३ \times २^{स-२}} - \frac{१}{३ \times २^{स-२}}, \frac{८}{३}$$

(६) सर्वे पद = खय^{स-१}(य-१). प्रथम पद क+खय आदे.
प्रथमपदानंतर सर्व पदे गुणोत्तर श्रेढीत आदेत.

$$(७) (क) \frac{८५७}{२४७५} \quad (ख) \frac{५}{९} \quad (ग) \frac{४७}{१९८}$$

(१०) ९

प्रश्नसंग्रह ७

$$(१) (अ) \frac{१}{६८}, \frac{१}{१३२}, \frac{१}{१९६}, \frac{१}{२६०} \quad (आ) \frac{१६}{५}, \frac{१६}{६}, \frac{१६}{७}$$

$$(इ) \frac{१५०, ७५, ५०, ३५}{१२१, ४६, २१, १७} \quad (ई) \frac{३}{४}, \frac{६}{११}, \frac{३}{७}, \frac{६}{१७}, \frac{३}{१०}$$

$$(२) \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५} \quad (३) \frac{(न-१) क ग}{क(न-१) + ग(स-न)}$$

$$(८) ८, ७२ \quad (९) १२, ३$$

प्रश्नसंग्रह ८

(१) (क) $\frac{2}{3} स (स+१)(२स+१)$

(ख) $\frac{१}{३} स (४स^२ - १)$

(ग) $\frac{१}{१२} स (स+१)(३स^२ + १९स + ८)$

(घ) $\frac{१}{१२} स (स+१)(स+२)(३स+१)$

(च) $\frac{स}{२} (६स^२ + ३स - १)$

(छ) $स^२ (२स^२ - १)$

(ज) स सम असल्यास $-\frac{स}{२} (स+१)$

स विषम असल्यास $\frac{स}{२} (स+१)$

(३) (क) $२^४ + १ ; २ (२^४ - १) + स$

(ख) $स^२ + १ ; \frac{१}{६} स (२स^२ + ३स + ७)$

$$(ग) \frac{1}{2} (3s-1) ; \frac{3}{8} (3s-1) - \frac{s}{2}$$

$$(५) (क) \frac{1}{3} s (s+1)(s+2)$$

$$(ख) \frac{s}{6} (8s^2 + 14s + 10)$$

$$(ग) \frac{1}{6} s (s+1)(9s^2 + 19s + 6)$$

$$(घ) \frac{1}{24} s (s+1)(s+2)(3s+1)$$

$$(ङ) \frac{1}{12} s (s+1)(3s^2 + 11s + 8)$$

$$(च) \frac{1}{6} s (s+1)(2s^2 + 2s - 1)$$

$$(छ) \frac{1}{3} s (s+1)(4s^2 + 4s - 1)$$

$$(ज) \frac{1}{48} s (s+1)(s+2)(3s+5)$$

$$(झ) \frac{1}{6} s (s^2 - 1)$$

$$(ज) \frac{1}{12} स (स+1)^2 (स+2)$$

$$(६) (क) \left[\frac{10}{९} (10स - १) - स \right]$$

$$(ख) \left[\frac{10}{२७} (10स - १) - \frac{स}{३} \right]$$

$$(ग) \left[\frac{२०}{२७} (10स - १) - \frac{२स}{३} \right]$$

प्रश्नसंग्रह ९

- (१) (१) वास्तविक आणि भिन्न। १, ३
 (२) वास्तविक आणि अपरिमिय। $१ \pm \sqrt{३}$
 (३) वास्तविक आणि समान। ७, ७
 (४) संकर। $१ \pm \sqrt{-१.३}$
- (२) (१) $य^२ - १२य + ३५ = ०$ (२) $य^२ - य - १२ = ०$
 (३) $य^२ + ८य + १५ = ०$ (४) $य^२ - २य - १ = ०$
 (५) $य^२ + ४य + १ = ०$ (६) $य^२ - ६य - ३२ = ०$
 (७) $य^२ + ६य + १३ = ०$
 (८) $य^२ + २कय + क^२ - ८ल = ०$
- (३) (१) २, $\frac{१}{२}$ (२) $-\frac{२}{३}$ (३) $-\frac{५}{२}$

(९) (१) क आणि ग यांचें चिह्न समान परंतु ख चें चिह्न विरुद्ध. (२) क आणि ख यांचें चिह्न समान परंतु ग चें चिह्न विरुद्ध.

(१०) १०, $४\sqrt{६}$, १

(१२) (१) $\frac{ख^४ - ४ख^३कग + २क^२ग^२}{क^४}$

(२) $\frac{ख^४ - ४ख^३कग + २क^२ग^२}{क^३ग}$

(३) $\frac{ग^४ख (ख^२ - ३कग)}{क^४}$

(१४) (१) $\frac{त}{थ^३}(त^२ - ३थ)$

(२) $\frac{त\sqrt{त^२ - ४थ}(त^२ - २थ)}{थ^३}$

(३) $\frac{त(त^२ - २थ)\sqrt{त^२ - ४थ}}{थ^४} \times$

$(त^४ + ४थ^२ - ४त^२थ - २त^३थ^२)$

(१५) $य^३ + ३ = ०$ (१६) $३य^३ + १ = ०$

(१७) (१) $खग य^३ + (कग + ख^३) य + कख = ०$

(२) $क^४य^३ - २क^३(ख^३ - २कग)य + ख^३(ख^३ - ४कग) = ०$

- (१८) (१) $यय^२ - (त^२ - २य)य + य = ०$
 (२) $यय^२ - २तय + ४ = ०$
 (३) $य^३य^२ - त(त^२ - ३य)य + १ = ०$
 (४) $य^२ - (त + \frac{त}{य})य + २ + य + \frac{१}{य} = ०$

प्रश्नसंग्रह १०

- (१) $\frac{८}{३} < य < -\frac{५}{२}$
 (२) $३ < य < -२$
 (३) $२ < य < ७$
 (१४) (१) $त = -३$ (२) $त = १०$ (३) $त = २$
 (१५) $-\frac{११}{४}$ अथवा $\frac{७}{८}$
 (२१) $क = ०$ अथवा ९
 (२२) $[क क, -ख ख,]^२ + ४ [ज ख, + ज, क] \times [ख ज, + क, ज] = ०$

प्रश्नसंग्रह ११

- (१) $य = २७, \frac{१२५}{३०८७}$ (२) $य = २, य = ८$

$$(३) \quad y=0, \quad y=-\frac{३}{४} \quad (४) \quad y=-४$$

$$(५) \quad y=१, २, \frac{३ \pm \sqrt{-१}}{२}$$

$$(६) \quad y=२, -३, \frac{-३ \pm \sqrt{-१४३}}{६}$$

$$(७) \quad y=-६, -२, \frac{-१५ \pm \sqrt{४१}}{२}$$

$$(८) \quad y=0, -५, \frac{-५ \pm \sqrt{-१५}}{२}$$

$$(९) \quad y=-४, -४ \pm \sqrt{१७} \quad (१०) \quad y=७$$

$$(११) \quad y=२, -\frac{१}{२} \quad (१२) \quad y=0, -३$$

$$(१३) \quad y=0, ३ \quad (१४) \quad y=\pm ३$$

$$(१५) \quad y=१, २ \quad (१६) \quad y=-\frac{४}{९}, ५$$

$$(१७) \quad y=४, \frac{१}{४}, २, \frac{१}{२} \quad (१८) \quad y=-२, \frac{१}{२}, -\frac{३}{२}, \frac{२}{३}$$

$$(१९) \quad y=-५, -\frac{१}{५}, -३, -\frac{१}{३}$$

$$(२०) \quad y=१, \frac{१}{२}, २, \frac{३}{२}, \frac{२}{३}$$

प्रश्नसंग्रह १२

(१) $y=2, r=1; y=1, r=2$ (२) $y=2, r=1;$

$y=18, r=-29$ (३) $y=\frac{3}{4}, r=\frac{4}{5}$

(४) $y=1, r=-2; y=-\frac{36}{13}, r=\frac{6}{13}$

(५) $y=1, r=4; y=8, r=2$ (६) $y=6, r=3;$

$y=3, r=6$ (७) $y=\frac{1}{3}, r=\frac{1}{2},$

$y=\frac{5}{2}, r=-\frac{5}{3}$

(८) $y=2, r=6; y=6, r=2$ (९) $y=3, r=6;$

$y=6, r=3$ (१०) $y=23, r=1; y=2, r=22$

(११) $y=8, r=6; y=6, r=8$

(१२) $y=1, r=3; y=-1, r=-3,$

$$y=\frac{3\sqrt{21}}{21}, r=\frac{2\sqrt{21}}{21};$$

$$y=-\frac{3\sqrt{21}}{21}, r=\frac{-2\sqrt{21}}{21}$$

$$(१३) \quad y = २, r = ३; \quad y = -२, r = -३$$

$$y = \pm \frac{४३}{\sqrt{१५१}}, \quad r = \pm \frac{२३}{\sqrt{१५१}}$$

$$(१४) \quad y = \pm २, r = \pm २;$$

$$y = \pm \frac{२}{३} \sqrt{६}, \quad r = \pm \frac{४}{३} \sqrt{६}$$

$$(१५) \quad y = \pm \frac{२}{७} \sqrt{३५}, \quad r = \pm \sqrt{\frac{३५}{७}};$$

$$y = \pm \frac{३}{२}, \quad r = \pm \frac{२}{३}$$

$$(१६) \quad y = \pm २, r = \pm ३; \quad y = \pm ३, r = \pm २$$

$$(१७) \quad y = -२, r = ३; \quad y = -\frac{१}{२}, r = ०; \quad y = १, r = १;$$

$$y = ३\frac{१}{२}, r = -५\frac{१}{२}$$

$$(१८) \quad y = ३, r = १; \quad y = -१, r = -३; \quad y = १ \pm \sqrt{-१०}$$

$$r = -१ \pm \sqrt{-१०}$$

$$(१९) \quad y = ५, r = १; \quad y = १, r = ५$$

$$y = ३ \pm \sqrt{-५८}, \quad r = ३ \mp \sqrt{५८}$$

$$(२०) \quad y = ३, r = १; \quad y = -१, r = -३;$$

$$y = \pm \sqrt{-६} + १, r = \pm \sqrt{-६} - १$$

$$(२१) \quad y = ७, r = ५; \quad y = -५, r = -७$$

$$(२२) \quad y = \frac{४}{५}, \quad r = २०; \quad y = \frac{१}{५}, \quad r = ५$$

$$(२३) \quad y = -३, \quad r = -२; \quad y = १, \quad r = २$$

$$(२४) \quad y = ३, \quad r = १; \quad y = १, \quad r = ३$$

$$(२५) \quad y = ४, \quad r = २; \quad y = -२, \quad r = -४;$$

$$y = १ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}, \quad r = -१ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}$$

$$(२६) \quad y = ३, \quad r = ३; \quad y = -\frac{१}{३}, \quad r = -\frac{१}{३}$$

$$y = ३, \quad r = -\frac{१}{३}; \quad y = -\frac{१}{३}, \quad r = ३$$

$$(२७) \quad y = \pm १, \quad r = \pm ३; \quad y = \pm ३, \quad r = \pm १$$

$$(२८) \quad y = \pm १, \quad r = \pm २; \quad y = \pm २, \quad r = \pm १$$

$$(२९) \quad y = २, \quad r = ४; \quad y = -२\frac{१}{३}, \quad r = -४\frac{१}{३}$$

$$(३०) \quad y = ४\frac{१}{३}, \quad r = ०; \quad y = ९, \quad r = ७$$

प्रश्नसंग्रह १३

$$(१) \quad y = \pm ५ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}, \quad r = \pm ६ \sqrt{\frac{१७}{१७७}},$$

$$l = \pm ७ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}$$

- (२) $y = \pm 2, r = \pm 6, l = \pm 3$
- (३) $y = 3, r = 2, l = 8; y = 2, r = 3, l = 8;$
 $y = 2 + \sqrt{-2}, r = 2 - \sqrt{-2}, l = 4$
 $y = 2 - \sqrt{-2}, r = 2 + \sqrt{-2}, l = 4$
- (४) $y = 1, r = 3, l = 2; y = 4, r = 1, l = 0$
 $y = 1, r = 2, l = 3; y = 4, r = 0, l = 1$
- (५) $y = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{3}, l = \frac{1}{8}$
- (६) $y = \pm 1, r = \pm 2, l = \pm 3$
- (७) $y = 4, r = \frac{4}{3}, l = \frac{4}{2};$
 $y = -9, r = -\frac{11}{3}, l = -\frac{1}{2}$
- (८) $y = 4, r = 3, l = 6;$
 $y = -9, r = -4, l = -8$
- (९) $y = 3, r = 8, l = 4;$
 $y = -13, r = -18, l = -14$
- (१०) $y = 2, r = 3, l = 1;$
 $y = -6, r = -9, l = -4$

(११)	$y=२,$	$r=३,$	$l=४;$
	$y=-४,$	$r=-५,$	$l=-६$
(१२)	$y=१,$	$r=१,$	$l=१;$
	$y=-३,$	$r=-३,$	$l=-३$
(१३)	$y=३,$	$r=४,$	$l=५;$
	$y=-३,$	$r=-४,$	$l=-५$

$$(१४) \quad y = \frac{१ + \sqrt{२ख + २ग - २क + १}}{२}$$

$$r = \frac{१ + \sqrt{२क - २ख + २ग + १}}{२}$$

$$l = \frac{१ + \sqrt{२क + २ख - २ग + १}}{२}$$

$$(१५) \quad y = +क \sqrt{\frac{ख + ग - क}{(क + ख - ग)(क + ग - ख)}}$$

$$r = +ख \sqrt{\frac{क + ग - ख}{(क + ख - ग)(ख + ग - क)}}$$

$$l = +ग \sqrt{\frac{क + ख - ग}{(क + ग - ख)(ख + ग - क)}}$$

$$(१६) \quad y = +६, r = +४, l = +५$$

$$(१७) \quad y = + \frac{त^२ - थद}{\sqrt{त^३ + थ^३ + द^३ - ३तथद}}$$

$$r = + \frac{y^2 - तद}{\sqrt{त^3 + य^3 + द^3 - ३तयद}}$$

$$ल = + \frac{द^2 - तय}{\sqrt{त^3 + य^3 + द^3 - ३तयद}}$$

(१८) $y = +1, r = +2, ल = +३$

प्रश्नसंग्रह १४

(१) ५६ (२) ४८० (३) $1^2क८$ (४) १००८०

(५) $\frac{१०, २}{८}$ (६) $\frac{५६}{९}$

(७) (१) $\frac{१२}{९}$ (२) $\frac{११}{७}$ (३) $\frac{स}{स-४}$

(४) $\frac{स+२}{स-१}$ (५) $\frac{स+न}{स-१}$

(८) (१) $स(स-१)$ (२) $\frac{स-२}{स^२-स-१}$

(१०) ३६०० (११) १२ (१२) ९८८०, २०४७५,
८२५९८८८ (१३) ६०४८०, २५५०२४, ७४२५६०

(१४) $न=स-१$ (१६) ३० (१७) ६५ (१८) ३४४

(१९) $1^4च, 1 \times 1^3च, ०$ (२०) ३५४ (२१) ९४५

(२२) २४. १०६६५६

$$(23) \frac{\frac{12}{13} \frac{12}{13}}$$

$$(24) 2016, 2022 \quad (25) 20 \quad (26) 6, 1, 1, 1, 1$$

$$(27) 2560200$$

$$(28) \frac{\frac{12}{13} \frac{12}{13}}$$

$$(29) 60$$

$$(30) \frac{22}{(12)^2 (16)^2} \frac{1}{4}$$

$$(31) \frac{14}{16 \frac{1}{2} \frac{1}{4}} \quad (32) \frac{16}{(12)^2}$$

$$(33) 149 \quad (34) 110 \quad (35) 40 \quad (36) 40$$

$$(37) 243 \quad (38) 8096 \quad (39) 124 \quad (40) 32$$

$$(41) 43, 74, 12 \quad (42) 220$$

$$(43) (1) \frac{1}{2} [n(n-1) - m(m-1) + 2]$$

$$(2) \frac{1}{6} [n(n-1) (n-2) - m(m-1) (m-2)]$$

$$(44) 90$$

प्रश्नसंग्रह १६

(१) $y^4 - ६९y^3 - ४८y + ६७२$ (२) (क) ५ (ख) -५

(३) (१) $y^4 + १०y^3 + ४०y^2 + ८०y + ८०y + ३२$

(२) $६४y^4 + ५७६२y^3 + २१६०२y^2 + ४३२०२y^3$
 $+ ४८६०२y^2 + २९१६२y + ७२९२$

(३) $६२५ - २०००y + २४००y^2 - १२८०y^3$

$+ २५६y^4$

(४) $१ - \frac{७}{y} + \frac{२१}{y^2} - \frac{३५}{y^3} + \frac{३५}{y^4} - \frac{२१}{y^5} + \frac{७}{y^6} - \frac{१}{y^7}$

(५) $y^{10} + १५३y^9 + ९०८२y^8 + २७०८३y^7$

$+ ४०५\frac{८४}{y^6} + २४३\frac{८४}{y^5}$

(६) $२४३y^4 - २०२५y^3 + ६७५०\frac{१}{y} - ११२५०\frac{१}{y^2}$

$+ \frac{९३७५}{y^3} - \frac{३१२५}{y^4}$

(७) (अ) $१३६१३६७० \frac{८४}{y^4}$ (आ) $१६५ \frac{y^4}{८४}$

(इ) $-१२० \frac{y^4}{८४}$ (ई) $७६०२y$

- (५) -242 अथवा $(-)^n 1^n$ च_५
 (६) ०, २१० क^{११} ख^१ (७) ३१२ र^१
 (८) २१० ग^{१२} (९) -100 च_३, ३^{११}
 (१०) जर स, ३ चा अपवर्त्य असेल तर $3^{\frac{स}{३}}$ ($-३क^३$)^स
 नार्हीतर कोणतेहि पद नाही.
 (११) $3^{\frac{स}{३}}$ च_५ य^१
 (१४) 1^3 च_५ य^१क^३ आणि 1^3 च_५ य^१क^१
 (१५) -१५४ य आणि $\frac{१३८६}{५}$ (१६) -६१२३६
 (१७) $\frac{२स}{सस}$ (१८) ९ वें पद ४९५
 (१९) ४ वें पद $\frac{५३७६}{२७}$ (२०) $n=१४$
 (२१) $n=स+१$ (२४) $n=१३$

प्रश्नसंग्रह १७

- (१) ४५ (२) २७१२ य^१ (३) ०

(५) (१) ११वें पद (२) ५वें पद (३) १२वें पद

(५) $\frac{16}{17} < x < \frac{17}{16}$

(६) (१) $\frac{16^2}{2}$ (२) $16^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (३) $16^2 \times 3^2$

(४) $-16 \times 2^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2$

(७) $2^{n-1} (n+2)$

प्रश्नसंग्रह १८

(१) (१) $(-)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots (2n+1)}{2^n n}$

(२) $\frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

(३) $(-)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots (2n-1)}{n} \times n$

$$(४) (-)^n (n+1) y^n$$

$$(५) \frac{1}{27} \frac{[n+1][n+2]}{1 \times 2} \left(\frac{y}{3}\right)^n$$

$$(६) \frac{1}{n\sqrt{k}} \frac{(s+1)(2s+1)\dots(n-1s+1)}{s^n n} \times \left[\frac{y}{k}\right]^n$$

$$(७) \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots (2n-2)}{n} \left(\frac{2y}{3}\right)^n$$

$$(८) \frac{8 \times 10 \times 12 \dots (2n-2)}{n} y^n$$

$$(२) (१) \frac{11 \times 1 \times 23 \times 27}{8^4} 4^x$$

$$(२) -९४५ k^{-1} x^2; -३०६१८ k^{-3} x^5$$

$$(३) \frac{1}{2^{1/2}}$$

$$(३) 1 - 2y - 2y^2 - 8y^3 - \dots$$

$$(४) k^3 \left[1 - \frac{3y}{k} + \frac{3y^2}{2k^2} + \frac{y^3}{2k^3} + \frac{3y^4}{4k^4} + \frac{3y^5}{4k^5} + \dots \right]$$

$$\times \frac{3 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5 \dots (2n-5)}{n} \frac{y^n}{x^{2n-3}}$$

$$(4) \quad x \left[1 + \frac{y}{2x^2} - \frac{y^2}{4x^4} + \frac{y^3}{8x^6} - \frac{y^4}{12x^8} + \dots \right]$$

$$(5) \quad - \frac{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 4 \times 6 \dots (2n-2)}{n}$$

$$(6) \quad \frac{s(s-1)}{2} + [s(s+1)] + \frac{(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2}$$

$$(7) \quad (1) \text{ २वें पद} \quad (2) \text{ ७वें पद} \quad (3) \text{ ९वें पद}$$

$$(8) \quad (1) 2020101 \quad (2) 10039$$

$$(3) 1010020 \quad (4) 0.8269$$

$$(9) \quad (1) 121 \quad (2) -\frac{1}{8} \left[2 + \frac{4}{3} \right]$$

$$(3) 2 \quad (4) 4x^2 - 8x^2$$

$$(5) (-2)^{n-2} (s-4)$$

$$(12) 714$$

$$(17) \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{8}{9}}} \quad (18) \sqrt{3}$$

$$(19) 2\sqrt{2} \quad (20) (2\sqrt{3}-3)$$

$$(21) y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$$

$$(22) y = \frac{1}{2}x - \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}x^3 - \dots$$

प्रश्नसंग्रह १९

$$(1) 4, 9, -1, -2, -4 \quad (2) 9, 4$$

$$(3) 4, 4, -4 \quad (4) (क) 4 (ख) 6 (ग) 6 (घ) \frac{1}{42}$$

$$(5) (अ) \frac{3}{4}छेक + 9छेख - 4छेग$$

$$(आ) छेक - 3छेख + 2छेग$$

$$(इ) -छेक + 3छेख + 6छेग$$

$$(ई) छेक + 11छेख - \frac{18}{3}छेग$$

(८) (क) ३ (ख) ५ (ग) -१ (घ) -३ (ङ) -६

$$(९) \frac{\text{छेक}}{\text{छेक}-\text{छेक}}$$

$$(१०) y=१.४६५ \quad (११) y=२.५६९$$

$$(१२) y=०, r=०; y=४, r=२$$

$$(१३) y=१६.६३$$

$$(१४) y=१० \text{ र } [क+१५], r=१० \text{ र } [क-१५]$$

प्रश्नसंग्रह २०

$$(१) १ - \frac{y}{१२} + \frac{y^२}{१३} - \frac{y^३}{१४} + \frac{y^४}{१५} - \dots$$

$$(२) या \left[१ + y + \frac{२y^२}{१२} + \frac{५y^३}{१३} + \frac{१५y^४}{१४} + \dots \right]$$

$$(३) y - \frac{y^२}{१३} + \frac{y^३}{१४} - \frac{y^४}{१५} + \dots$$

$$(५) (-)^n \left[\frac{१}{n} + \frac{२}{n-१} + \frac{३}{n-२} + \dots \right]$$

- (६) $\frac{1}{2-k}[ya - ya^k]$ (९) $ya + ya^{-1} - 2$
- (१०) (अ) $ya^2 - ya$ (ब) $\frac{3ya}{2}$ (इ) ya
- (ई) $4ya$ (उ) $3ya$ (ऊ) $4ya - 3$
- (११) $3y - \frac{4y^2}{2} + \frac{9y^3}{3} - \frac{16y^4}{4} + \dots$
- (१२) $\frac{k+1}{y} - \frac{k^2+x^2}{2y^2} + \frac{k^3+x^3}{3y^3} - \dots$
- (१६) (अ) $1 - छे२$ (आ) $1 - २ छे२$
- (इ) $छे२ - \frac{1}{२}$ (ई) $छे\frac{६}{५}$
- (१७) $y = २ + \frac{२^२}{२} + \frac{२^३}{३} + \dots$
- (१९) $.८४५०९८०$

प्रश्नसंग्रह २१

- (१) ९१ (२) ० (३) -८ (४) -५२
- (५) $कसग + २चछज - कच^२ - सछ^२ - गज^२$
- (६) ० (७) ० (१०) ०

पारिभाषिक-शब्दावलि

आंग्ल—मराठी

absurd असंगत	ascending आरोही
according as तदनुसार	assumption कल्पना
accuracy परिशुद्धता	base आधार
addition योग, सङ्कलन	binomial द्विपद
adjustment व्यवस्थापन	binomial coefficient द्विपद
algebraic बीजीय	गुणक
aliter अन्यथा	binomial theorem द्विपद
alternately एकान्तरत	प्रमेय
alternative विकल्प	bracket अभिन्नार
anti logarithm प्रतिच्छेद	calculation परिगणन
apparatus साधन	cancel विलोपन, छोप करणे
arithmetical progression	case प्रकार, दशा
समांतर श्रेढी	change परिवर्तन
arithmetico - geometric-	characteristic लक्षण
series समांतर गुणोत्तर श्रेढी	classification वर्गीकरण
arithmetic mean समांतर	coefficient गुणक
मध्यक	co factor सहगुणक
arrangement arrange विन्यास	column स्तम्भ
करण	columnwise स्तम्भानुसार
arrow शर	combination संयोज
article अनुच्छेद	

commensurable समेय	cube root घन मूल
committee समिति	dash प्राय
common difference प्रचय	decimal दशमिक
common factor समापवर्तक	decimal fraction दशमिक
common ratio साधारण	भिन्न
निष्पत्ति	definite परिमित
common system सामान्य	definition परिभाषा
पद्धति	degree of accuracy परिशुद्धते
complementary संपूरक	ची मात्रा
completely पूर्ण रूपेण	delete अपमार्जन
complex संकर	denominator हर
complex quantity संकर राशि	denote अभिधान करण
condition प्रतिबंध	dependent परतंत्र
conditional equation प्रतिबंधी	descending अवरोही
समीकार	determinant निश्चायक
conjugate अनुबद्ध	development विकास
conjugate quadratic surd	diagonal विकर्ण
अनुबद्ध वर्ग करणी	diagonally opposite विकर्णत
consecutive अनुगामी	संस्मृष्ट
constant अचल	digit अंक
constant term अचल पद	dimension विमा
constituent संघटक	direct multiplication प्रत्यक्ष
contain अन्तर्धारण	गुणन
convergence अभिसार	discriminant विवेचक
convergent अभिसारी	discussion पर्यालोचन
corollary उपप्रमेय	dissimilar असमरूप
correct शुद्ध	divergence अपसार
corresponding सवादी	divergent अपसारी
cross multiplication तिर्यक	dividend भाज्य
गुणन	eliminant निरस्त

elimination निरसन	finite परिमित
equality समता	finite quantity परिमित राशि
equate समीकरण करणे	finite series सात श्रेढी
equation समीकार	form रूप
equidistant समदूर	formula सूत्र
equivalent समार्ह	fraction भिन्न
even युग्म	fractional भिन्नीय
evolution मूल किया	function श्रित
exactly सुतथ्यत	fundamental मूलभूत
exactness सुतथ्यता	generally सामान्यत
expansion विस्तार	general term सामान्य पद
exponential equation घात समीकार	geometrical progression गुणोत्तर श्रेढी
exponential series घातांक श्रेढी	geometric mean गुणोत्तर मध्यक
express व्यक्त करणे	greatest महत्तम
expression व्यक्त, पदसहति	group समूह
extraction of a root वर्गमूल निस्सारण	harmonical progression हरात्मक श्रेढी
factor खण्ड	harmonic mean हरात्मक मध्यक
factorial हत *	

* The 'product' of all the integers in serial order from one onwards

** A quantity which takes on a definite value, or values when special values are assigned to certain other quantities called the argument or independent variables of the function. This term is used mostly to point out dependence on some certain variable or variables (Mathematics Dictionary by G James and R G James) 'dependent from root' यि to depend on from which the noun आश्रय is well known

homogeneous समानघात	integral अनुकल, पूर्णांक
homogeneous equation समानघात समीकार	integral part पूर्णांक भाग, अनुकल भाग
homogeneous function समानघात भित	interchange व्यतिहरण, व्यतिहार
hypotenuse कर्ण (ancient word)	interpretation निर्वचन
hypothesis उपकल्पना	inverse व्युत्क्रम
identical सर्वान्वसम	investigation अनुसंधान
identity ऐक्यत्व	involution घात प्रिया
illustrative निदर्शनात्मक	irrational अपरिमेय
imaginary काल्पनिक	kind प्रकार
imaginary part कारपनिघटक	known ज्ञात
incommensurable असंमेय	last term अन्त पद
incommensurability असंमेयता	law नियम
increase वर्धन	laws of indices घातांक नियम
indefinite अपरिमित, अनियत	leading constituent अग्र सघटक
independent स्वतंत्र	leading diagonal अग्र विकर्ण
index घातांक*	left hand side वामपक्ष
infinite अनंत	like सजातीय, समरूप
infinite series अनन्त श्रेणी	limit सीमा
infinity अनन्ती	linear रेखीय, एकघात
insertion निवेशन	linear equation रेखीय समीकार
instructive बोधात्मक	logarithm छेदा
in the limit सीमान्ती	logarithmic series छेदा श्रेणी
	magnitude मद्दचा

* The figure letter or expression अङ्क showing the power घात of a quantity.

mantissa दशमिकांश *	part घटक
mathematical induction गणितीय अनुमान	partial product आंशिक गुणन फल
mean मध्यक	partly अंशत
mean difference मध्यक्रान्तर	permutation क्रमचय
middle term मध्य पद	polynomial बहुपद
minor उपनिर्द्धारक **	power घात
minus विद्युत	preceding पूर्वगामी
modulus मापाङ्क	prismatic colours माक्षेत्रिक वर्ण
monomial एक पद	process विधो
multiple अपवर्त्य (प्राचीन शब्द)	progression श्रेणी
natural number प्राकृतिक संख्या	proof उपपत्ति
natural logarithm प्राकृतिक छेदा	proper fraction एतद्भित्ति भिन्न
negligible उपेक्ष्य, नगण्य	proportional अनुपाती
non recurring अनावर्ती	proposition साध्य
note धालोक, टिप्पणी	prove उपपादित करने
notation संकेतना	quadratic वर्गाद, द्विघात
number संख्या	quadratic equation द्विघात समीकरण
numerical संख्यात्मक	quadratic expression द्विघात पञ्चमहति
numerically संख्येने	quadratic function द्विघात श्रित
observation अवलोकन	quadratic surd द्विघात करणी
odd अयुग्म, विषम	
order अनुक्रम, क्रम, वर्ण	
pair युग्म	

* decimal दशमिक part अंश of a logarithm hence दशमिकांश

** minor determinant

quantity राशि
 quotient छद्म, भागफल
 radical मूल
 radical sign मूल चिह्न
 ratio निष्पत्ति
 rational परिमेय
 rationalisation परिमेयकरण
 rationalise परिमेयकरण करने
 rationalising factor परिमेय
 कारक सपट
 real वास्तविक
 real part वास्तविक घटक
 rearrangement पुनर्विन्यास
 reciprocal व्युत्क्रम
 reciprocal equation व्युत्क्रम
 समीकार
 recurring decimal आवर्त
 दशमिक
 reduction प्रदासन
 reference अभ्युद्देश
 repeat पुनरावृत्ति करने
 represent प्रतिनिधान करने
 required अपेक्षित, इष्ट
 respectively क्रमशः
 test विश्राम
 restricted निबद्ध
 restriction निबध
 reverse order उल्टा क्रम
 right hand side दक्षिण पक्ष
 root मूल

row पंक्ति
 rule of cross multiplication
 तिर्यग् गुणनाचा नियम
 same order समान
 satisfy समाधान करने
 selection प्रचरण
 separately एकैकश
 series श्रेंदी
 set कुलक
 side पक्ष
 signal संज्ञा
 significant सार्थक
 similar समरूप
 simplify सरल करने
 simultaneous equation
 युगपत समीकार
 solution साधन
 solve साधन करने
 square वर्ग करने
 stage प्रक्रम
 standard प्रमाण
 statement आवेदन
 station स्थात्र (प्राचीन शब्द)
 substitution आदेश
 subtraction रियोग
 succession पूर्वानुपरता
 successive पूर्वानुपर
 sufficient पर्याप्त
 suffix पादाङ्ग
 summation योगकरण

suppress निग्रहण करणे	'theorem प्रमेय
surd करणी	transformation रूपान्तरण
symbol प्रतीक	transposition पक्षान्तरण
symmetry समिति	trinomial त्रिपद
symmetrical equation	type प्ररूप
संमितीय समीकार	unknown अज्ञात
symmetrical function	unlike विजातीय
संमितीय श्रित	up to infinity यावदनन्ति
table सारणी	value अर्हा
tedious दीर्घसूत्री	vanish लोप होणे
telegraph apparatus दूरलिख	variable चल
साधित्र	verification सत्यापन
tend to प्रवृत्त	verify सत्यापन करणे
term पद	very small अत्यल्प

Notation

nP_r संक्रम	$i [\sqrt{-1}]$ त $[\sqrt{-1}]$
nO_r सन्न	Lt. सी
$ n $ स	$n \rightarrow \infty$ स $\rightarrow \infty$
(factorial n) (हत स)	ω (cube root of unity)
Σ य	ओ (एकचें घन मूल)
e [base of natural logari- thm] वा [प्राकृतिक छेदाचा साधार]	S (for sum) यो [योग]

पारिभाषिक-शब्दावलि

मराठी—आंग्ल

अंश, numerator	अन्त पद last term
अंशतः partly	अन्तर difference
अग्र त्रिकर्ण leading diagonal	अन्तर्धारण contain
अग्र मंचटक leading consti- tuent	अन्यथा aliter
अचल constant	अपरिमय irrational
अज्ञात unknown	अपत्यं multiple
अत्यल्प very small	अपसार divergence
अनन्त infinite	अपसारी divergent
अनन्त श्रेढी infinite series	अपेक्षित required
अनन्ती infinity	अभिधान करणे to denote
अनावर्त non recurring	अभिवार brackets
अनुकल integral	अभिसार convergence
अनुकल भाग integral part	अभिसारी convergent
अनुक्रम order	अभ्युद्देश reference
अनुगामी consecutive	अयुग्म odd
अनुच्छेद article	अर्हा value
अनुपाती proportional	अवरोही descending
अनुबद्ध conjugate	अवलोकन observation
अनुबद्ध वर्ग करणी conjugate quadratic surd	अव्यक्त unknown
अनुसंधान investigation	असंगत absurd
	असमरूप unlike, dissimilar

असमेय incommensurable	काल्पनिक राशि imaginary
असमेयता incommensurability	quantity
असीम without limit	सुलभ set
आंशिक गुणनफल partial product	क्रम order
आदेश substitution	क्रमचय permutation
आरोही ascending	क्रमशः respectively
आलोचन note	खण्ड factor
आवर्त दशमिक recurring decimal	गणितीय अनुमान mathematical induction
आवर्त होने to recur	गुणक coefficient
आवेदन statement	गुणोत्तर मध्यक geometric mean
उत्क्रम reverse order	गुणोत्तर श्रृंखला geometrical progression
उपपक्षणा hypothesis	घटक part
उपनिश्चायक minor	घात power
उपपत्ति proof	घात क्रिया involution
उपपादन करने prove	घात समीकार exponential equation
उपपक्षमेय corollary	घातांक नियम laws of Indices
उपेक्ष्य negligible	घातांक श्रृंखला exponential series
एकघात linear	चल variable
एकपद monomial	छद्म logarithm
एकान्तरत alternately	छद्म श्रृंखला logarithmic series
एकैकश separately	तत्काल immediately
ऐक्य identity	तदनुसार according as
करणी surd	तिर्यग् गुणनाचा नियम rule of cross multiplication
कल्पना assumption	
काल्पनिक घटक imaginary part	

त्रिपद trinomial	पक्ष side
दक्षिण पक्ष right hand side	पक्षान्तरण transposition
दशमिक decimal	पंक्ति row
दशमिक भिन्न decimal fraction	पद term
दशमिकांश mantissa	पदसहति expression
दीर्घसूत्री tedious	परतः dependent
दूरलिख साधित्र telegraph apparatus	परिगणन calculation
द्विघात quadratic	परिभाषा definition
द्विघात पदसहति quadratic expression	परिमित राशि finite quantity
द्विघात ध्रित quadratic fun ction	परिमेय rational
द्विघात समीकार quadratic equation	परिमेयवरण rationalisation
द्विपद binomial	परिमेयकरण करणे rationalise
द्विपद गुणक binomial coeffi cient	परिमेयकारक खण्ड rationalis ing factor
द्विपद प्रमेय binomial theorem	परिवर्तन change
द्विपद विस्तार binomial expan sion	परिशुद्धता accuracy
नगण्य negligible	पर्याप्त sufficient
नियद्ध restricted	पादाक suffix
निबंध restriction	पुनरावृत्त repeated
निरसन elimination	पुनर्विन्यास rearrangement
निर्वचन interpretation	पूर्वगामी preceding
निवेश insertion	पूर्णांक integral
निश्चायक determinant	पूर्वानुपर successive
नित्यपति ratio	पूर्वानुपरता succession
	प्रक्रम stage
	प्रचय common difference
	प्रतिच्छेदा antilogarithm
	प्रतिनिधान करणे to represent
	प्रतिबंध condition

प्रतिबंधी समीकार conditional equation	मापांक modulus
प्रतिस्थापन replacement	मूल root, radical
प्रतीक symbol	मूल क्रिया evolution
प्रत्यक्ष गुणन direct multiplication	मूल चिह्न radical sign
प्रमाण standard	मूलभूत fundamental
प्रमेय theorem	यष्टि yard
प्ररूप type	यावदनन्ति up to infinity
प्रवरण selection	युगपत समीकार simultaneous equation
प्रवृत्त tend to	युग्म even, pair
प्रहासन reduction	योग addition
प्राकृतिक छेदा natural logarithm	योगकरण summation
प्राकृतिक संख्या natural number	योग करने to sum
प्रास dash	राशि quantity
फल result	रूपान्तरण transformation
बहुपद polynomial	रेखीय linear
बीजीय algebraic	रेखीय समीकार linear equation
बोधात्मक instructive	लक्षण characteristic
भाजन करने to divide	लघ्वंश भिन्न proper fraction
भाज्य dividend	लब्धि quotient
भिन्न fraction	लुप्त करने to cancel
भिन्नीय fractional	लुप्त होणे vanish
मध्यक mean	वर्ग square
मध्यकान्तर mean difference	वर्गमूल निस्तारण extraction of a root
मध्यपद middle term	वर्गीकरण classification
महत्तम greatest	वर्गीय quadratic
महत्ता magnitude	वर्ण order
	वर्धन increase
	वाम पक्ष left hand side

चास्तविक घटक real part	संचय combination
त्रिकर्ण diagonal	संज्ञति signal
विकल्प alternative	सत्यापन verification
विजातीय unlike	सत्यापन करणे verify
विधा process	समता equality
विन्यस्त करणे to arrange	समदूर equidistant
विन्यास arrangement	समवर्ण same order
विधुत minus	समाधान करणे to satisfy
वियोग subtraction	समान घात homogeneous
विवेचक discriminant	समानघात समीकार homogeneous
व्यक्त करणे express	ous equation
व्यंजक expression	समानघात श्रित homogeneous
व्यतिहरण interchange	function
व्यवस्थापन adjustment	समान्तर मध्यक arithmetic
व्युत्क्रम reciprocal	mean
व्युत्क्रम समीकार reciprocal	ममान्तर श्रेढी arithmetical
equation	progression
दश arrow	समान्तर गुणोत्तर श्रेढी arithme-
शुद्ध correct	ticogeometric progression
श्रित function	समापवर्तक common factor
श्रेढी progression series	समाई equivalent
संवादी corresponding	समिति committee
संकर complex	समीकरण equate
संकर राशि complex quantity	समीकार equation
संकलन addition	समूह group
संकेतना notation	संपूरक complementary
संख्या number	संमिति symmetry
संख्येने numerically	संमितीय symmetrical
संख्यात्मक numerical	संमितीय श्रित symmetrical
संघटक constituent	function

संमितीय समीकार symmetrical equation	सारणी table
संमेय commensurable	सार्थक significant
सरल करने to simplify	सीमा limit
सर्वांगसम identical	सीमान्ती in the limit
सहगुणक cofactor	सीमेंत in the limit
सांक्षेत्रिक वर्ण prismatic colours	सुतथ्यतः exactly, exactness
साधन solution	सूत्र formula
साधन करने to solve	स्तम्भ column
साधारण निष्पत्ति common ratio	स्तम्भानुसार columnwise
साध्य proposition	स्वतन्त्र independent
सान्त श्रेढी finite series	हत factorial
सामान्यतः generally	हर denominator
सामान्य पद general term	हरात्मक मध्यक harmonic mean
सामान्य पद्धति common system	हरात्मक श्रेढी harmonical progression

छेदा-प्रतिछेदा-सारणी

उद्देश-सारणी (logarithmic tables)

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१२३	१२४	१२५
५०	६९६०	६९६८	६९७७	६९८६	६९९५	७००४	७०१३	७०२२	७०३१	७०४०	७०४९	७०५८	७०६७
५१	७०७६	७०८५	७०९४	७१०३	७११२	७१२१	७१३०	७१३९	७१४८	७१५७	७१६६	७१७५	७१८४
५२	७१९३	७२०२	७२११	७२२०	७२२९	७२३८	७२४७	७२५६	७२६५	७२७४	७२८३	७२९२	७३०१
५३	७३१०	७३१९	७३२८	७३३७	७३४६	७३५५	७३६४	७३७३	७३८२	७३९१	७४००	७४०९	७४१८
५४	७४२७	७४३६	७४४५	७४५४	७४६३	७४७२	७४८१	७४९०	७४९९	७५०८	७५१७	७५२६	७५३५
५५	७५४४	७५५३	७५६२	७५७१	७५८०	७५८९	७५९८	७६०७	७६१६	७६२५	७६३४	७६४३	७६५२
५६	७६६१	७६७०	७६७९	७६८८	७६९७	७७०६	७७१५	७७२४	७७३३	७७४२	७७५१	७७६०	७७६९
५७	७७७८	७७८७	७७९६	७८०५	७८१४	७८२३	७८३२	७८४१	७८५०	७८५९	७८६८	७८७७	७८८६
५८	७८९५	७९०४	७९१३	७९२२	७९३१	७९४०	७९४९	७९५८	७९६७	७९७६	७९८५	७९९४	८००३
५९	८०१२	८०२१	८०३०	८०३९	८०४८	८०५७	८०६६	८०७५	८०८४	८०९३	८१०२	८१११	८१२०
६०	८१२९	८१३८	८१४७	८१५६	८१६५	८१७४	८१८३	८१९२	८२०१	८२१०	८२१९	८२२८	८२३७
६१	८२४६	८२५५	८२६४	८२७३	८२८२	८२९१	८३००	८३०९	८३१८	८३२७	८३३६	८३४५	८३५४
६२	८३६३	८३७२	८३८१	८३९०	८४००	८४०९	८४१८	८४२७	८४३६	८४४५	८४५४	८४६३	८४७२
६३	८४८१	८४९०	८५००	८५०९	८५१८	८५२७	८५३६	८५४५	८५५४	८५६३	८५७२	८५८१	८५९०
६४	८६००	८६०९	८६१८	८६२७	८६३६	८६४५	८६५४	८६६३	८६७२	८६८१	८६९०	८७००	८७०९
६५	८७१८	८७२७	८७३६	८७४५	८७५४	८७६३	८७७२	८७८१	८७९०	८८००	८८०९	८८१८	८८२७
६६	८८३६	८८४५	८८५४	८८६३	८८७२	८८८१	८८९०	८९००	८९०९	८९१८	८९२७	८९३६	८९४५
६७	८९५४	८९६३	८९७२	८९८१	८९९०	९०००	९००९	९०१८	९०२७	९०३६	९०४५	९०५४	९०६३
६८	९०७२	९०८१	९०९०	९१००	९१०९	९११८	९१२७	९१३६	९१४५	९१५४	९१६३	९१७२	९१८१
६९	९१९०	९२००	९२०९	९२१८	९२२७	९२३६	९२४५	९२५४	९२६३	९२७२	९२८१	९२९०	९३००
७०	९३०९	९३१८	९३२७	९३३६	९३४५	९३५४	९३६३	९३७२	९३८१	९३९०	९४००	९४०९	९४१८
७१	९४२७	९४३६	९४४५	९४५४	९४६३	९४७२	९४८१	९४९०	९४९९	९५०८	९५१७	९५२६	९५३५
७२	९५४४	९५५३	९५६२	९५७१	९५८०	९५८९	९५९८	९६०७	९६१६	९६२५	९६३४	९६४३	९६५२
७३	९६६१	९६७०	९६७९	९६८८	९६९७	९७०६	९७१५	९७२४	९७३३	९७४२	९७५१	९७६०	९७६९
७४	९७७८	९७८७	९७९६	९८०५	९८१४	९८२३	९८३२	९८४१	९८५०	९८५९	९८६८	९८७७	९८८६

[illegible]

પ્રતિદેશી સારાણી (antilogarithmic tables)

૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯	૧૨૩	૪૫૬	૭૮૯
૦૦	૦૦૦૬	૦૦૦૮	૦૦૦૯	૦૦૧૦	૦૦૧૧	૦૦૧૨	૦૦૧૩	૦૦૧૪	૦૦૧૫	૦૦૧૬	૦૦૧૭	૦૦૧૮
૧૦	૦૦૧૯	૦૦૨૦	૦૦૨૧	૦૦૨૨	૦૦૨૩	૦૦૨૪	૦૦૨૫	૦૦૨૬	૦૦૨૭	૦૦૨૮	૦૦૨૯	૦૦૩૦
૨૦	૦૦૩૧	૦૦૩૨	૦૦૩૩	૦૦૩૪	૦૦૩૫	૦૦૩૬	૦૦૩૭	૦૦૩૮	૦૦૩૯	૦૦૪૦	૦૦૪૧	૦૦૪૨
૩૦	૦૦૪૩	૦૦૪૪	૦૦૪૫	૦૦૪૬	૦૦૪૭	૦૦૪૮	૦૦૪૯	૦૦૫૦	૦૦૫૧	૦૦૫૨	૦૦૫૩	૦૦૫૪
૪૦	૦૦૫૫	૦૦૫૬	૦૦૫૭	૦૦૫૮	૦૦૫૯	૦૦૬૦	૦૦૬૧	૦૦૬૨	૦૦૬૩	૦૦૬૪	૦૦૬૫	૦૦૬૬
૫૦	૦૦૬૭	૦૦૬૮	૦૦૬૯	૦૦૭૦	૦૦૭૧	૦૦૭૨	૦૦૭૩	૦૦૭૪	૦૦૭૫	૦૦૭૬	૦૦૭૭	૦૦૭૮
૬૦	૦૦૭૯	૦૦૮૦	૦૦૮૧	૦૦૮૨	૦૦૮૩	૦૦૮૪	૦૦૮૫	૦૦૮૬	૦૦૮૭	૦૦૮૮	૦૦૮૯	૦૦૯૦
૭૦	૦૦૯૧	૦૦૯૨	૦૦૯૩	૦૦૯૪	૦૦૯૫	૦૦૯૬	૦૦૯૭	૦૦૯૮	૦૦૯૯	૦૧૦૦	૦૧૦૧	૦૧૦૨
૮૦	૦૧૦૩	૦૧૦૪	૦૧૦૫	૦૧૦૬	૦૧૦૭	૦૧૦૮	૦૧૦૯	૦૧૧૦	૦૧૧૧	૦૧૧૨	૦૧૧૩	૦૧૧૪
૯૦	૦૧૧૫	૦૧૧૬	૦૧૧૭	૦૧૧૮	૦૧૧૯	૦૧૨૦	૦૧૨૧	૦૧૨૨	૦૧૨૩	૦૧૨૪	૦૧૨૫	૦૧૨૬

[illegible]

मुद्रक
शिवकुमार वर्मा, एम्. ए.
प्रबन्धक, आर्यभारती मुद्रणालय
नागपुर.

शुद्धिपत्र

पृष्ठ संख्या	पंक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
२३	७	$\frac{त^3}{थ}$	$\frac{त}{थ}$
२३	८	यह	यड
२९	३	$२\sqrt{ख}$	$२\sqrt{ख}$
३५	१७	क ^२ + ख ^२ या	क ^२ + ख ^२
४४	१२	अतः	महणून
६४	१७	मस	मस
६४	१८	मत	मत
६६	२	$\frac{त}{+१}$	$\frac{त}{त+१}$
७९	८	संख्येने पेक्षा	संख्येने १ पेक्षा
८२	८	$\frac{१}{१-\frac{२}{७}}$	$\frac{१}{१-\frac{१}{७}}$
८३	१०	योस	योस
१३४	२०	कय ^१	कय ^२
१४१	१६	कय + र + छ	कय + जर + छ
१७४	३	$\frac{१}{य}$	$\frac{१}{य}$
२८२	१३	$\frac{स(स-१)(स-२)}{३}$	$\frac{स(स-१)(स-२)}{३} य^३$